Rapport de stage L3

Marie Lhuissier

2011

Sujet du stage

Plutôt que de travailler sur un article de recherche, j'ai choisi d'effectuer mon stage dans le domaine de la diffusion mathématique. Etienne Ghys m'a proposé d'écrire un article pour le site internet Images des Mathématiques (IdM) ; Vincent Borrelli, de l'université Lyon 1, a accepté de me faire profiter de sa large expérience de la diffusion mathématique en encadrant ce stage, qui s'est déroulé du 6 juin au 16 juillet. Avec lui, j'ai rédigé un article sur le théorème de Poncelet et les billards elliptiques, destiné au public le plus large. Cet article est joint en annexe ; il y manque les vidéos, qui ont été remplacées par des images.

1 Introduction

Le but de ce stage a été pour moi d'apprendre à m'exprimer devant un public non mathématien. En effet, je pense qu'il est important pour un mathématicien, que ce soit en tant que chercheur ou en tant qu'enseignant, de pouvoir s'abstraire du formalisme dont il a l'habitude afin de communiquer ses idées à un public moins familier avec le sujet. Or cette capacité est un véritable savoir-faire, qui s'apprend et se pratique. Le choix de m'adresser à un public dont je ne suppose *aucune* connaissance mathématique est doublement motivé. D'une part, il me semble qu'une plus grande vulgarisation constitue un plus grand défi, que de parvenir à donner l'idée de certains concepts mathématiques à l'aide des seuls mots du langage courant est un exercice très formateur, en particulier en vue de vulgarisations moindres à destination d'étudiants ou de chercheurs. D'autre part, j'estime qu'il est nécessaire que chacun puisse avoir accès, même très partiellement, aux mathématiques modernes. J'ignore si c'est le fait de l'enseignement des mathématiques en primaire et en secondaire, du manque de communication entre les mathématiciens et la société, ou d'autre chose, mais « l'homme de la rue » a généralement une vision très erronée des mathématiques. En particulier, il n'imagine souvent pas la place prépondérante qu'occupent dans le domaine l'esthétique et la créativité. Les initiatives telles le site IdM composent autant de passerelles vers la société qui contribuent à rendre intelligible, voire reconnue, l'activité du mathématicien.

Mon objectif premier n'était donc pas tant de comprendre en profondeur le sujet que de le présenter de manière pédagogique. Le premier travail fut le choix du sujet -le théorème de Poncelet-, et un tour d'horizon aussi vaste que possible de ce qui se rapporte à ce théorème : ses démonstrations, les méthodes et les notions mathématiques qu'elles utilisent, la vie du généram Poncelet, etc. Puis, il fallut écrire, corriger et illustrer l'article.

Je présenterai d'abord le théorème de Poncelet et ses démonstrations, ainsi que les billards elliptiques et les travaux de Serge Tabachnikov, puis j'exposerai les quelques points qui ont constitué l'essentiel du travail de rédaction et des problématiques rencontrées.

2 Contenu mathématique

2.1 Le théorème de Poncelet

Le point de départ de l'article est un théorème de géométrie projective énoncé en 1814 par le mathématicien français Jean-Victor Poncelet.

Théoreme 1. *Soient Γ et Γ' deux coniques. Si P est un n-gone inscrit dans Γ et circonscrit à Γ', alors pour tout point a de Γ il existe un n-gone inscrit dans Γ et circonscrit à Γ' ayant a pour sommet.*

On appelle souvent ce théorème le porisme de Poncelet : le nombre de côtés (éventuellement infini) du polygone inscrit dans Γ et circonscrit à Γ' passant par un point de Γ donné ne dépend pas de ce point.

Avant de considérer les démonstrations de ce théorème, procédons à quelques rappels de géométrie projective.

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps K de caractéristique strictement supérieure à 2. Le* **plan projectif associé à** *E, noté $\mathbb{P}(E)$, est le quotient de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence*

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists \lambda \in K^* : x = \lambda y$$

Un **point** *de $\mathbb{P}(E)$ est l'image par la projection canonique π d'une « droite vectorielle » de $E \setminus \{0\}$, i.e. d'une droite vectorielle de E privée de 0. Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$, alors (x_1, x_2, x_3) sont les* **coordonnées homogènes** *de $\pi(x)$. Elles sont définies à un scalaire non nul près.*

Une **droite** *de $\mathbb{P}(E)$ est l'image par π d'un « plan vectoriel » de $E \setminus \{0\}$.*

Définition 2. *Soit q une forme quadratique non nulle sur E. On appelle* **conique** *l'image du cône isotrope de q par π. Si q est non-dégénérée, la conique associée est dite propre.*

Définition 3. *Soit* Γ *une conique propre d'équation* $q = 0$*, et* $a = \pi(x)$ *un point de* Γ*. On appelle* **tangente à** Γ **en** *a l'image par* π *de*

$$x^\perp = \{y \in E \setminus \{0\} \quad ; \quad \hat{q}(x,y) = 0\}$$

C'est une droite de $\mathbb{P}(E)$*.*

Une notion que nous discuterons amplement est celle de la dualité projective, qui a d'ailleurs été inventée par Jean-Victor Poncelet.

Définition 4. *On appelle* **espace projectif dual** *de* $\mathbb{P}(E)$ *l'espace projectif* $\mathbb{P}(E^*)$ *associé à* $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$*.*

Si E *est muni d'une forme quadratique non dégénérée, on a un isomorphisme*

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E^*) \\ & & \pi(x) & \longmapsto & \pi'((x^\perp)^*) \end{array}$$

Cet isomorphisme envoie droite sur point, point sur droite et conique sur conique.

Une dernière notion sur les coniques, celle de faisceau, nous sera utile pour comprendre la suite. L'espace des formes quadratiques sur E est un K-espace vectoriel de dimension 6, et son espace projectif associé est isomorphe à l'espace des coniques de $\mathbb{P}(E)$. On peut donc poser la

Définition 5. *Soient* Γ *et* Γ' *deux coniques. Le* **faisceau de coniques** *engendré par* Γ *et* Γ' *est la droite de l'espace projectif des coniques contenant* Γ *et* Γ'*.*

C'est l'ensemble des coniques de $\mathbb{P}(E)$ *d'équation* $\lambda q + \mu q' = 0$*, où* q, q' *sont les équations de* Γ, Γ' *et* $(\lambda, \mu) \in K^2 \setminus (0,0)$

Remarque : Lorsque $K = \mathbb{C}$, toute paire de coniques admet quatre points d'intersection (comptés avec multiplicité) ; le faisceau de coniques engendré par cette paire peut alors être défini comme l'ensemble des coniques passant par ces quatre points.

Définition 6. *Soit* $A \in \mathcal{GL}(E)$*. L'application*

$$\begin{array}{rcccc} T & : & \mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \\ & & \pi(x) & \longmapsto & \pi(A.x) \end{array}$$

est appelée **transformation projective***.*

On vérifie qu'une telle application est bien définie, i.e. qu'elle ne dépend pas du représentant choisi. Une transformation projective est une bijection qui envoie droite sur droite. Elle est caractérisée par l'image de quatre points de $\mathbb{P}(E)$ en position générale, c'est-à-dire tels que trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés.

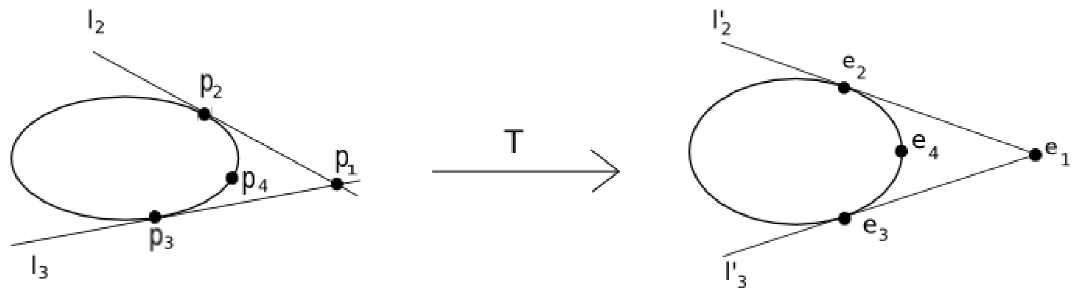
Proposition 2. *Soient* Γ *une conique propre. Alors il existe une transformation projective qui envoie* Γ *sur la conique* δ *d'équation*

$$x^2 - yz = 0$$

Démonstration. On considère les quatre points de $\mathbb{P}(E)$:

$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0), \qquad e_3 = (0,0,1), \qquad e_4 = (1,1,1)$$

ainsi que p_2, p_3, p_4 trois points distincts de Γ, l_2 et l_3 les tangentes à C en p_2 et p_3 respectivement, et p_1 le point d'intersection de l_2 et l_3.



Comme les quadruplets (p_1, p_2, p_3, p_4) et (e_1, e_2, e_3, e_4) sont en position générale, il existe T une transformation projective qui envoie l'un sur l'autre. L'image de Γ par T est une conique Δ' d'équation

$$q = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

avec a, b, c, d, e, f non tous nuls. Comme Δ' contient e_2, e_3, e_4, il vient

$$q(e_2) = b = 0, \qquad q(e_3) = c = 0, \qquad q(e_4) = a + ... + f = 0$$

De plus, en appelant l'_2 et l'_3 les images respectives de l_2 et l_3 par T, on a $e_1, e_2 \in l'_2$ et $e_1, e_3 \in l'_3$, d'où

$$l'_2 : z = 0, \qquad l'_3 : y = 0$$

Mais comme l'_2 et l'_3 sont également tangentes à Δ en e_2 et e_3, il vient

$$l'_2 : dx + 2by + fz = 0, \qquad l'_3 : ex + fy + 2cz = 0$$

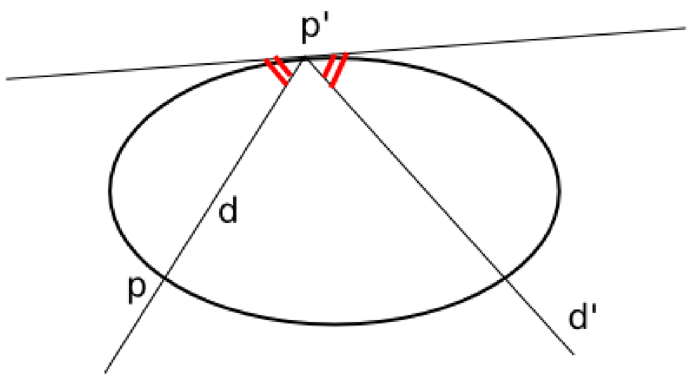
d'où $b, c, d, e = 0$, donc $q = a(x^2 - yz) = 0$ et $\Delta = \Delta'$. $\square$

Le théorème de Poncelet portant sur des propriétés de tangence et d'intersection dans une figure, propriétés qui sont préservées par transformation projective, on peut se ramener au cas de deux cercles. Par contre, on ne peut pas se ramener au cas de deux cercles concentriques, auquel cas le théorème serait trivial. Malgré cette simplification, il n'existe pas de démonstration simple du théorème de Poncelet. Les démonstrations connues de la géométrie projective sont assez longues et fastidieuses, et la démonstration la plus classique, découverte par Jacobi en 1828, utilise la géométrie algébrique. Elle m'a été exposée dans ses grandes lignes par Jérôme Germoni, de Lyon 1.

La démonstration que nous avons choisi d'exploiter date de 1990 ; elle est dûe à Serge Tabachnikov, qui étudie les systèmes dynamiques, et en particulier les billards. Ce qui suit m'a été expliqué par Valentin Ovsienko, de Lyon 1, qui est un proche collaborateur de S. Tabachnikov.

2.2 Les billards

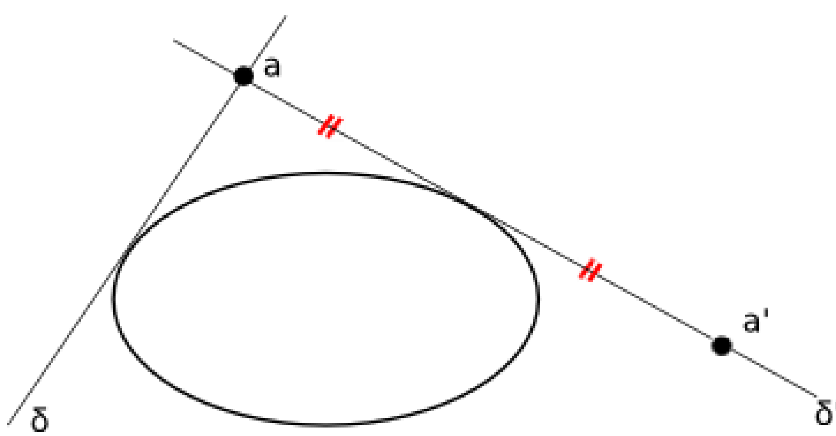
Un **billard elliptique** est un système dynamique discret caractérisé par la donnée d'une ellipse. Il consiste en une fonction qui agit sur l'espace des couples (d, p), où d est une droite intersectant l'ellipse en deux points distincts, et p un de ces deux points. Cette fonction envoie p sur l'autre point d'interection p', et d sur la droite passant par p' vérifiant la loi suivante : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.



Les billards elliptiques possèdent une propriété très intéressante pour ce qui nous concerne, et que j'ai utilisée pour introduire le théorème de Poncelet au lecteur :

Proposition 3. *La trajectoire d'un billard elliptique possède toujours une caustique, et cette caustique est une conique.*

Mais le billard qu'utilise Tabachnikov dans sa démonstration est légèrement différent ; il s'agit d'un **billard extérieur**. Là encore, il s'agit d'un système dynamique discret caractérisé par la donnée d'une ellipse, mais l'espace sur lequel agit la fonction est celui des couples (a, δ) où a est un point extérieur à l'ellipse et δ une des deux tangentes à l'ellipse passant par a. Cette fonction envoie δ sur l'autre tangente δ', et a sur le point de δ' selon la loi suivante : a et son image sont à égale distance de l'ellipse.



En un sens, les deux billard semblent être duaux l'un de l'autre. A une ellipse correspond une autre ellipse, à un point sur la première une droite tangente à la deuxième, à une droite passant par ce point un point sur cette droite, etc... D'ailleurs, le billard extérieur porte également le nom de billard dual.

Cette relation entre les billards me parut idéale, en premier lieu pour introduire les billards extérieurs, nécessaire à la démonstration mais largement moins intuitifs que les billards classiques, et en second lieu pour expliquer la dualité, notion qui me paraît à la fois profonde et abordable (à un certain degré) sans bagage mathématique.

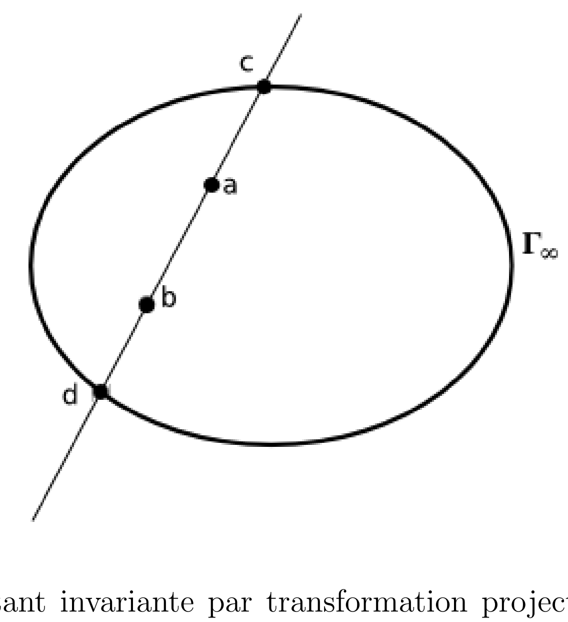
Mais cette relation m'apparut rapidement floue, et possiblement rien de plus qu'une analogie. En effet le billard classique nécessite la notion d'angle, et le billard dual celle de distance. Or, s'il existe des distances non euclidiennes qui sont préservées par transformation projective (c'est le cas de la distance hyperbolique, qu'utilise précisément Tabachnikov dans sa démonstration), en revanche la géométrie projective ne connaît pas les angles...

Je reviendrai sur le problème de la dualité dans la section suivante.

La preuve de Tabachnikov

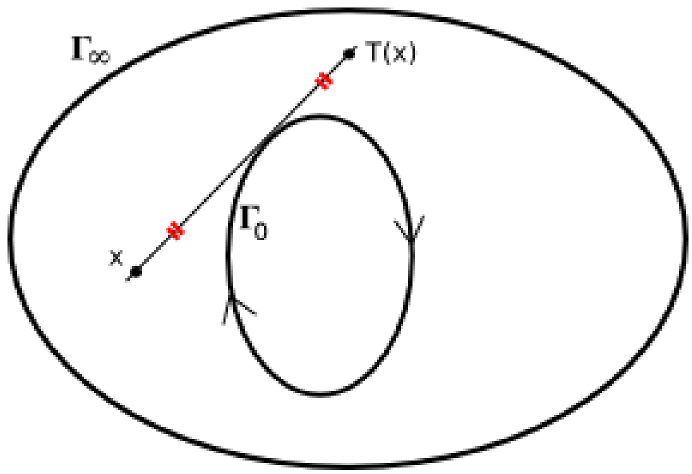
Dans sa démonstration du théorème de Poncelet, Tabachnikov utilise un billard dual muni d'une distance hyperbolique. La construction est la suivante : Γ_∞ est une ellipse dont l'intérieur est muni de la distance dite hyperbolique : la distance entre deux points a et b est la moitié du logarithme du birapport entre a, b et les deux points d'intersection de la droite ab et de Γ_∞.

$$d(a,b) = \frac{1}{2} \cdot \ln([d;c;a;b]) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{ad.bc}{bd.ac}\right)$$



Cette distance étant invariante par transformation projective, on se place dans le plan projectif réel. De plus, l'intérieur de Γ_∞ est muni d'une aire induite par la distance hyperbolique.

Si Γ_0 est une ellipse (orientée) située dans l'intérieur de Γ_∞, on peut alors considérer le billard extérieur défini par Γ_0, i.e. l'application T qui envoie un point de $Int(\Gamma_\infty)$ sur son symétrique par rapport à Γ_0, pour la distance hyperbolique et selon l'orientation de Γ_0.



Tabachnikov démontre alors les deux lemmes suivants :

Lemme 1. *T préserve l'aire.*

La démonstration est un peu technique, mais conceptuellement peu intéressante.

Lemme 2. *Toute ellipse du faisceau engendré par Γ_0 et Γ_∞ située dans l'intérieur de Γ_∞ est invariante par T.*

Pour démontrer ce lemme, on considère une droite d tangente à Γ_0 en a. On a alors une involution i sur $d \cap Int(\Gamma_\infty)$: un point x appartenant à l'ellipse Γ_x du faisceau est envoyé sur l'autre point de $d \cap \Gamma_x$. Tabachnikov montre alors que cette involution est une homographie, donc une transformation projective. Or, les transformations projectives respectent les distances, et a est un point fixe de i. Ainsi $d(x, a) = d(i(x), a)$, i.e. $i(x) = T(x)$.

Soit alors Γ_1 une ellipse du faisceau, et x un point de Γ_1. Comme l'application T respecte l'aire et préserve Γ_1, elle préserve également la distance sur Γ_1. T est donc nécessairement une translation sur Γ_1.

Ceci démontre le théorème de Poncelet : si Γ_0 et Γ_1 sont deux ellipses l'une dans l'autre, on choisit Γ_∞ une ellipse du faisceau engendré par les deux autres, et telle que $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset Int(\Gamma_\infty)$, et on munit son intérieur de la distance hyperbolique. D'après ce qui précède, si il existe un n-gone inscrit dans Γ_1 et circonscrit à Γ_0, et si a est un de ses sommets, alors les autres sommets sont les images itérées de a par l'application « billard dual » T, qui est une translation sur Γ_1. Le point a étant alors n-périodique, tous les autres points de Γ_1 le sont.

Remarque : Il n'est en fait pas nécessaire pour utiliser cet argument que l'espace soit muni d'une distance : la simple existence d'une aire et d'une fonction qui préserve l'aire et feuillette l'espace permet de munir chaque feuille d'une structure affine. La fonction est donc nécessairement affine. Si de plus les feuilles sont des boucles, la fonction est une translation.

3 Le travail de vulgarisation

Avant toute chose, il fallait décider le sujet de l'article. Vincent Borrelli m'avait proposé de parler des spirales et de leur apparition dans la nature, mais après une semaine de recherches, nous avons convenu que le contenu mathématique était plutt̂ élémentaire (mathématiques « anciennes ») alors que les connaissances nécessaires en biologie étaient largement au-dessus de mes compétences.

Choisir un bon sujet n'est pas chose évidente. Il fallait, c'est une des exigences d'IdM, que l'article débouche sur des thématiques ou des résultats de recherche actuelle. En outre, il fallait qu'il soit classé *piste verte*, c'est-à-dire qu'il puisse être lu par quelqu'un ayant presque tout oublié des mathématiques. En particulier, tout devait être écrit sans symbole mathématique, et tout terme mathématique (même les notions élémentaires, ou fondamentales, telle la notion de fonction) devait être défini dans l'article. La géométrie, par sa facilité à être illustrée, visualisée, et appréhendée par l'intuition, nous paraissait une branche idéale. J'ai donc feuilleté le livre de Marcel Berger, *Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob*, qui a justement pour but d'exposer des problèmes de géométrie s'énonçant simplement, mais dont la résolution nécessite une importante montée dans l'abstraction. Dans le chapitre sur les coniques, une large section est consacrée au théorème de Poncelet, que Marcel Berger qualifie de « plus beau théorème sur les coniques ». Dans ce chapitre il survole l'histoire de ce théorème et de ses démonstrations.

Une fois choisi le sujet principal, il fallut trouver l'angle d'attaque. Les courbes elliptiques me paraissant d'un niveau d'abstraction bien trop élevé pour une *piste verte*, et les démonstrations de Poncelet inadéquates pour un site tourné vers la recherche actuelle, nous avons convenu avec Vincent Borrelli que nous présenterions le théorème par l'intermédiaire des billards, qui offrent au lecteur une prise par l'intuition physique et constituent par ailleurs un champ de recherche moderne.

Outre les difficultés attendues, tels que le style, le ton à prendre en s'adressant au lecteur, la manière d'illustrer l'article et surtout la réalisation pratique desdites illustrations, j'ai rencontré un problème qui me semble inhérent à la vulgarisation : « Comment faire passer des idées mathématiques à un parfait néophyte ? ». En effet, en voulant expliquer l'activité du mathématicien, on se tourne facilement vers des descriptions un peu vagues de la nature des mathématiques, comme celle que j'ai esquissée dans l'article : « Tracer de tels chemins entre des objets très éloignés, voilà une des activités principales du mathématicien. (. . .) L'intérêt de créer des liens, construire des ponts, tracer des chemins, regrouper les notions sous une même définition –appelez cela comme vous voudrez– est multiple. (. . .) il y a un réel plaisir esthétique à deviner, découvrir petit à petit, et enfin mettre en évidence la structure sous-jacente d'un objet mathématique, son « essence » ». Ces considérations ne sont sans doute pas inintéressantes : elles permettent de voir les mathématiques par les yeux de ceux qui la pratiquent. Mais elles ne donnent aucun élément de *compréhension* mathématique : le lecteur ne peut qui croire sur parole quelque chose qu'il ne voit pas. Il me semblait donc important de parvenir à introduire au moins une notion mathématique profonde dont le lecteur parviendrait à saisir l'idée, le mécanisme. J'espère avoir atteint ce but entre autres avec la section sur la dualité.

3.1 Expliquer la dualité

J'ai essayé de faire comprendre au lecteur le principe de dualité sans prononcer le mot « fonction » (et encore moins le mot isomorphisme !). J'ai donc tenté une approche plus imagée, avec l'idée d'un miroir déformant entre deux mondes. Cependant, le choix du miroir n'est pas anodin : il transmet l'idée d'une correspondance réglée, régie par des lois données une fois pour toutes, ce qui n'est pas le cas d'autres images qui me sont venues à l'esprit, telle la baguette magique ou le pont. En effet, un miroir déformant illustre assez bien la notion d'isomorphisme : il existe une bijection entre les objets et leurs reflets, et on observe une certaine préservation de la structure : si deux objets se touchent, par exemple, leurs reflets aussi. Bien sûr, un miroir déformant ne pourra jamais faire se correspondre des objets très éloignés, probablement parce que les lois de la physique sont plus rigides que l'imagination des mathématiciens, mais l'analogie me semble tout de même valable. Le seul inconvénient majeur est que l'image par un miroir déformant n'est pas une involution. . .mais le fait que la dualité soit une involution n'a pas été utilisé dans l'article.

La notion de dualité comporte à mon sens un important avantage, qui est de permettre au lecteur de participer à l'élaboration de l'objet dual. Il suffit de donner les « règles de la dualité » et d'effectuer les premières transformations, pour que le lecteur puisse prendre la suite et finir lui-même la construction de l'objet, se l'appropriant ainsi plus facilement. C'est ce que j'ai tenté de faire par l'intermédiaire de dessins.

Les raisons exposées ci-dessus justifient je l'espère la place accordée dans l'article à la notion de dualité malgré le flou qui l'entoure. En effet, si le billard extérieur muni de la distance hyperbolique appartient au plan projectif, le billard classique en revanche, avec ses égalités d'angles, ne saurait y appartenir. La « dualité » qui relie les deux billards ne peut donc pas être la dualité projective. Jean-Yves Welschinger, de Lyon 1, à qui j'ai présenté de problème, a proposé la construction suivante : à chaque point a de la conique duale Γ_0 (orientée) est associé un point de la conique Γ_∞ qui définit la distance : le point d'intersection de Γ_∞ et de la tangente orienté à Γ_0 en a. En passant aux duaux, on obtient une bijection entre l'ensemble de tangentes à la conique classique, et un autre ensemble de droites. La loi de rebond du billard classique serait alors donnée par la contrainte que la tangente, la droite associée, le rayon incident et le rayon réflechi soient en rapport harmonique (c'est-à-dire que leur birapport soir égal à -1). Lorsque la droite associée à la tangente est la normale, on retrouve effectivement la loi ≪ classique ≫. Dans le billard dual associé, Γ_0 et Γ_∞ sont alors homofocales. Cette construction semble satisfaisante, hormis le fait que la ≪ loi de rebond duale ≫ ne s'écrit pas comme un rapport harmonique du point de tangence, du point de Γ_∞ associé et des deux points consécutifs de la trajectoire...

Serge Tabachnikov, à qui j'ai demandé quelques précisions, m'a expliqué qu'il s'agissait en fait d'une la dualité sphérique : à tout point de la sphère (le pôle nord) correspond un grand cercle orienté (l'équateur). Cette dualité interchange les points et les droites. Malheureusement, elle n'est pas bien définie, et ne joue donc qu'un rôle heuristique : on ne connaît pas de manière de passer formellement de ces billards sphériques aux billards planes. En bref, le rapport entre billard classique et billard dual mériterait d'être creusé.

Références

[B] *Marcel Berger. Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob, IV-8. Cassini, 2009.*

[F] *Leopold Flatto. Poncelet's Theorem. AMS, 2008.*

[T-1] *Serge Tabachnikov. Poncelet's Theorem and Dual Billiards. L'enseignement Mathématique, 1993.*

[T-2] *Serge Tabachnikov. Dual Billiards.*