CM5 : L'intégration convexe 1-dimensionnelle

David Spring

Deux exemples introductifs

Problème 1.– Soit

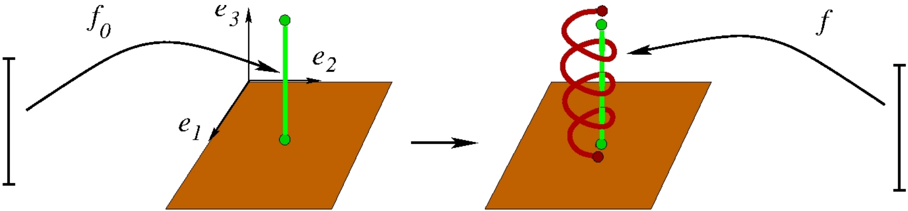
$$f_0 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (0,0,t) \end{array}$$

l'application linéaire envoyant le segment $[0,1]$ verticalement dans $\mathbb{R}^3$.
On cherche $f : [0,1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{array}{ll} i) & \forall\, t \in [0,1], \quad |\cos(f'(t), e_3)| < \epsilon \\ ii) & \|f - f_0\|_{C^0} < \delta \end{array}$$

où $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont donnés.

Deux exemples introductifs



L'image de f_0 est le segment vertical (vert), la solution f est l'hélice (rouge).

Deux exemples introductifs

Solution.– On considère l'hélice

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \delta \cos 2\pi N t \\ \delta \sin 2\pi N t \\ t \end{array} \right. \end{array}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de boucle. On a

$$\left\langle \frac{f'}{\|f'\|}, e_3 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 N^2 \delta^2}}.$$

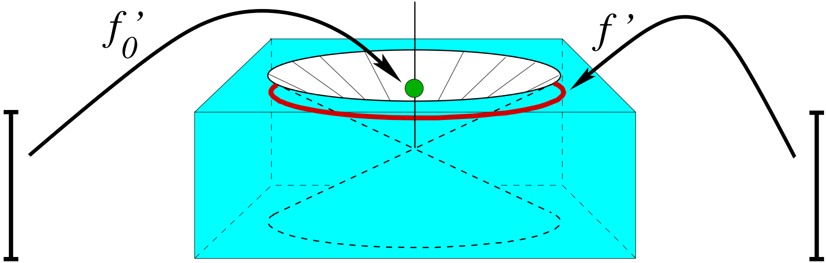
et par conséquent, si N est suffisamment grand, f satisfait aux conditions *i* et *ii*.

Deux exemples introductifs

Reformulation.– La condition (i) signifie que l'image de f' est incluse dans le cône :

$$\mathcal{R} = \{v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \mid \left|\langle \frac{v}{|v|}, e_3 \rangle\right| < \epsilon\} \cup \{O\}.$$

Par extension, le cône $\mathcal{R}$ est appelé la *relation differentielle* du problème.



Deux exemples introductifs

La C^0-proximité exprimée par la condition (*ii*) s'obtient comme conséquence d'une propriété géométrique de la dérivée de f. En effet, l'image de f' est un cercle inclus dans le cône et dont le centre est l'image de l'application constante f_0'. Par conséquent, la moyenne de f' pour chaque boucle de f est $f_0'(t)$:

$$\frac{1}{Long(I_k)} \int_{I_k} f'(u)du = f_0'(t)$$

où $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$ est la préimage d'une boucle par f. Après intégration, les deux applications obtenues seront donc proches l'une de l'autre.

Deux exemples introductifs

Problème 2.– Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$ un sous-ensemble connexe par arcs (=la relation différentielle) et $f_0 : [0,1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ une application telle que

$$\forall t \in [0,1], \quad f_0'(t) \in \mathit{IntConv}(\mathcal{R})$$

où $\mathit{IntConv}(\mathcal{R})$ désigne l'intérieur de l'enveloppe convexe de $\mathcal{R}$. Le problème est de trouver $f : [0,1] \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ telle que :

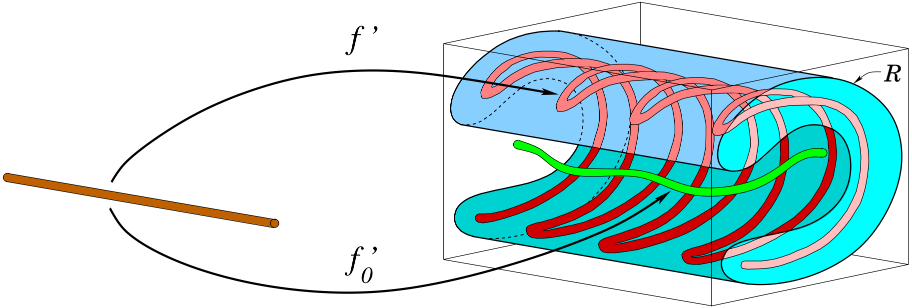
$i)$ $\forall t \in [0,1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}$

$ii)$ $\|f - f_0\|_{C^0} < \delta$

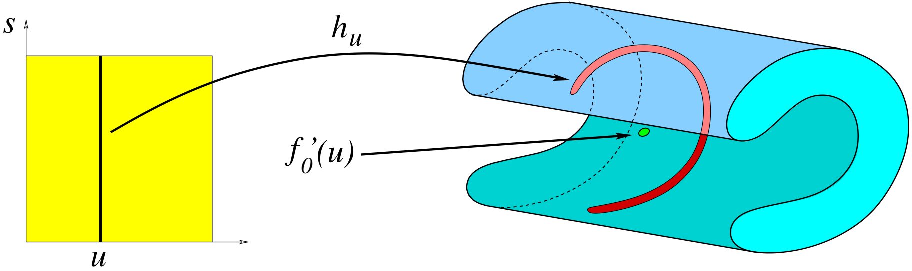
où $\delta > 0$ est donnée.

Deux exemples introductifs

Solution.– Choisir f' comme suggéré dans le dessin ci-dessous :



Deux exemples introductifs



Afin de construire formellement une solution f au problème, on choisit une famille continue de lacets $\mathcal{R}$:

$$h : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{R}) \\ u & \longmapsto & h_u \end{array}$$

telle que

$$\forall u \in \ [0,1], \quad \int_{[0,1]} h_u(s)ds = f_0'(u)$$

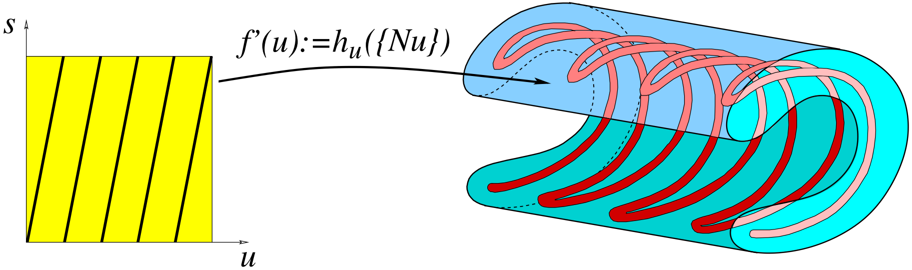
i.e la moyenne du lacet h_u est $f_0'(u)$.

Deux exemples introductifs

L'application f' est alors construite à partir de cette famille de lacets au moyen d'un procédé diagonal

$$\forall t \in \ [0,1], \quad f'(t) := h_t(\{Nt\})$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et où $\{Nu\}$ est la partie fractionnaire de Nt.



Deux exemples introductifs

Il ne reste ensuite plus qu'à intégrer f' pour obtenir une solution au problème 2 :

$$f(t) := f_0(0) + \int_0^t h_u(\{Nu\})du.$$

Définition.– On dit alors que f est obtenu à partir de f_0 par un

procédé d'intégration convexe. On note $f = IC(f_0, h, N)$.

Lemme fondamental de l'intégration convexe

Notation.– Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$. On désigne par $IntConv(A, a)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant a.

Lemme fondamental de l'intégration convexe

Notation.– Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$. On désigne par $\mathit{IntConv}(A, a)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant a.

Définition.– Un lacet $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ *entoure strictement* $z \in \mathbb{R}^n$ si

$$\mathit{IntConv}(g([0, 1])) \supset \{z\}.$$

Lemme fondamental de l'intégration convexe

Notation.– Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$. On désigne par $IntConv(A, a)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant a.

Définition.– Un lacet $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ *entoure strictement* $z \in \mathbb{R}^n$ si

$$IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}.$$

Lemme fondamental.– *Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$ Il existe un lacet $h : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathcal{R}$ basé en σ entoure strictement z et tel que :*

$$z = \int_0^1 h(s)ds.$$

Démonstration

• Puisque $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$, il existe un n-simplexe Δ dont les sommets $y_0, ..., y_n$ sont inclus dans $\mathcal{R}$ et tel que z soit dans l'intérieur de Δ. Par conséquent, il existe aussi

$$(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \,]0, 1[\,^{n+1}$$

tels que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$ et $z = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k$. Tout lacet $g : [0, 1] \to \mathcal{R}$ basé en σ et passant par $y_0, ..., y_n$ vérifie $IntConv(g([0, 1]) \supset \{z\}$ i. e. g entoure z.

Démonstration

• Puisque $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$, il existe un n-simplexe Δ dont les sommets $y_0, ..., y_n$ sont inclus dans $\mathcal{R}$ et tel que z soit dans l'intérieur de Δ. Par conséquent, il existe aussi

$$(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \,]0, 1[\,^{n+1}$$

tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$ et $z = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k$. Tout lacet $g : [0, 1] \to \mathcal{R}$ basé en σ et passant par $y_0, ..., y_n$ vérifie $IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}$ i. e. g entoure z.

• En général

$$z \neq \int_0^1 g(s)ds.$$

Démonstration

• Notons $s_1, ..., s_N$ les temps où $g(s_k) = y_k$ et soit $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

i) $f_k < \eta_1$ sur $[0, 1] \setminus [s_k - \eta_2, s_k + \eta_2]$,

ii) $\displaystyle\int_0^1 f_k = 1$,

avec η_1, η_2 deux nombres strictement positifs arbitraires.

Démonstration

• Notons $s_1, ..., s_N$ les temps où $g(s_k) = y_k$ et soit $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

i) $f_k < \eta_1$ sur $[0,1] \setminus [s_k - \eta_2, s_k + \eta_2]$,

ii) $\displaystyle\int_0^1 f_k = 1$,

avec η_1, η_2 deux nombres strictement positifs arbitraires.

• On pose :

$$z_k := \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir η_1, η_2 tels que :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \qquad \|z_k - g(s_k)\| \leq \epsilon.$$

Démonstration

- Comme $\mathcal{R}$ est ouverte et $z \in Int\ \Delta$, si ϵ est suffisamment petit on a

$$z \in IntConv(z_1, ..., z_n).$$

- Par conséquent, il existe $(p_1, ..., p_n) \in]0,1[^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

- On a :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^{n} p_k z_k &= \sum_{k=0}^{n} p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=0}^{n} p_k f_k(s) ds &= \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

où on a posé $\varphi'(s) := \sum_{k=0}^{n} p_k f_k(s)$.

Démonstration

• Ainsi

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \varphi(u)du. \end{array}$$

et $\varphi'(s) > 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.

• φ est un difféomorphisme strictement croissant de $[0,1]$ dans lui-même. Effectuons le changement de variable $s = \varphi^{-1}(t)$, c'est-à-dire $t = \varphi(s)$.

• On a

$$z = \int_0^1 g(s)\varphi'(s)ds = \int_0^1 g \circ \varphi^{-1}(t)dt.$$

Pa conséquent $h = g \circ \varphi^{-1}$ convient. $\square$

Remarque

• On peut choisir h parmi les “allers-retours” *i. e.* l’espace :

$$\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R}) = \{h \in \Omega_\sigma(\mathcal{R}) \mid \forall s \in [0,1] \;\; h(s) = h(1-s)\}.$$

• L’espace $\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R})$ est contractible. Pour tout $u \in [0,1]$, on pose

$$h_u(s) = \begin{cases} h(s) & \text{si} \quad s \in [0, \frac{u}{2}] \cup [1 - \frac{u}{2}] \\ h(u) & \text{si} \quad s \in [\frac{u}{2}, 1 - \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

• L’homotopie ainsi définie rétracte $\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R})$ sur l’application constante

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\sigma}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ & s & \longmapsto & \sigma. \end{array}$$

La version paramétrique

Lemme fondamental (version paramétrique C^∞). – *Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que*

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \ \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma^\infty(E)$ tels que :

$$\forall p \in P,\ z(p) \in IntConv(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : P \times [0,1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ telle que :

$$h(.,0) = h(.,1) = \sigma \in \Gamma(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P,\ h(p,.) \in \Omega^{AR}_{\sigma(p)}(\mathcal{R}_p)$$

et

$$\forall p \in P,\ z(p) = \int_0^1 h(p,s)ds.$$

Les idées de la démonstration

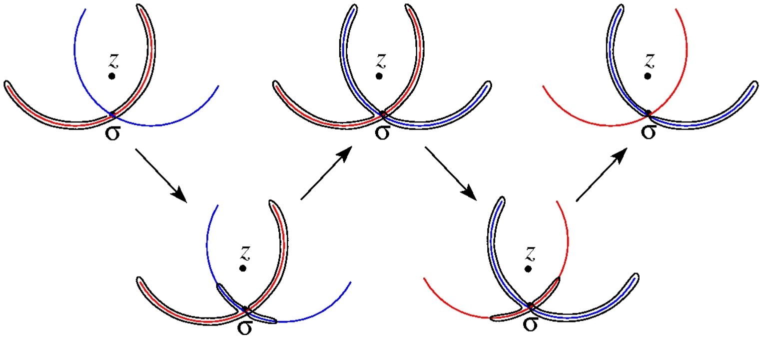
• Il faut s'assurer de l'existence de $(n+1)$ applications $y_0, \dots, y_n : P \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \; IntConv(\{y_0(p), \dots, y_n(p)\}).$$

• Ce programme est possible localement, il faut ensuite passer d'une situation locale à une autre (recoller !), pour cela on s'appuie sur la contractibilité des chemins en aller-retour.

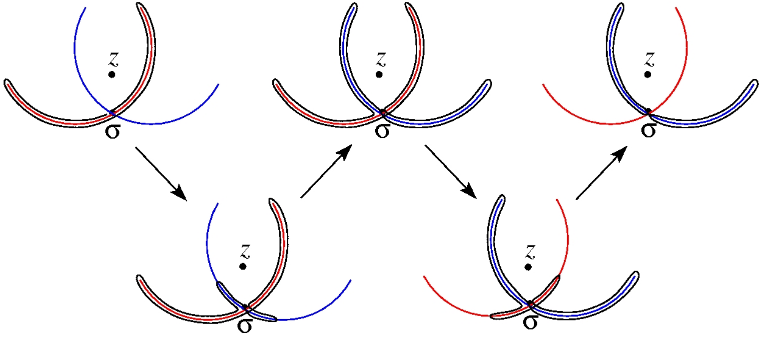
Les idées de la démonstration

- Un dessin plutôt qu'un long discours :



Les idées de la démonstration

- Un dessin plutôt qu'un long discours :



- Il faut ensuite reparamétrer les chemins h de façon à s'assurer que

$$\forall p \in P, \; z(p) = \int_0^1 h(p,s)ds.$$

La version C^∞

Lemme fondamental (version paramétrique C^∞). – *Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que*

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \ \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma^\infty(E)$ tels que :

$$\forall p \in P,\ z(p) \in IntConv(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : P \times [0,1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ telle que :

$$h(.,0) = h(.,1) = \sigma \in \Gamma(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P,\ h(p,.) \in \Omega^{AR}_{\sigma(p)}(\mathcal{R}_p)$$

et

$$\forall p \in P,\ z(p) = \int_0^1 h(p,s)ds.$$

C^0-densité

Proposition 1.– *Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arcs et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ est telle que*

$$f_0'(I) \subset \ IntConv(\mathcal{R})$$

alors il existe $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ obtenue par intégration convexe à partir de f_0 telle que

$$F'(I) \subset \mathcal{R} \ \ et \ \ \|F - f_0\|_{C^0} < O(\frac{1}{N})$$

La démonstration

• D'après le lemme fondamental, version lisse, il existe $h : I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall t \in I, \quad f_0'(t) = \int_0^1 h(t,u)du.$$

La démonstration

• D'après le lemme fondamental, version lisse, il existe $h : I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall t \in I, \quad f_0'(t) = \int_0^1 h(t,u)du.$$

• Définissons $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ par

$$F(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns)ds$$

où N est un entier naturel non nul.

• En dérivant, on obtient :

$$F'(t) = h(t, Nt) \in \mathcal{R}$$

l'application f est donc solution de $\mathcal{R}$.

La démonstration

$$
\begin{aligned}
F(t) - f_0(t) &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns)ds - f_0(t) \\
&= \int_0^t h(s, Ns)ds - (f_0(t) - f_0(0)) \\
&= \int_0^t h(s, Ns)ds - \int_0^t f_0'(s)ds \\
&= \int_0^t h(s, Ns)ds - \int_0^t \left(\int_0^1 h(s, u)du \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^t (h(s, Ns) - h(s, u))\, ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{Nt} \left(h(\frac{s}{N}, s) - h(\frac{s}{N}, u) \right) ds \right) du
\end{aligned}
$$

La démonstration

$$
\begin{aligned}
F(t) - f_0(t) &= \frac{1}{N}\int_0^1 \left(\int_0^{[Nt]} \left(h(\frac{s}{N}, s) - h(\frac{s}{N}, u) \right) ds \right) du \\
&+ \frac{1}{N}\int_0^1 \left(\int_{[Nt]}^{Nt} \left(h(\frac{s}{N}, s) - h(\frac{s}{N}, u) \right) ds \right) du
\end{aligned}
$$

Avec des notations évidentes, posons

$$F(t) - f_0(t) = A + B$$

• Le terme B vérifie

$$\|B\| \leqslant \frac{2}{N}\,\|h\|_{C^0}$$

La démonstration

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N}\int_0^1 \left(\int_0^{[Nt]} \left(h(\frac{s}{N},s) - h(\frac{s}{N},u)\right) ds\right) du \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1 \left(\int_k^{k+1} \left(h(\frac{s}{N},s) - h(\frac{s}{N},u)\right) ds\right) du \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(h(\frac{s+k}{N},s+k) - h(\frac{s+k}{N},u)\right) ds\right) du \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(h(\frac{s+k}{N},s) - h(\frac{s+k}{N},u)\right) ds\right) du
\end{aligned}
$$

La démonstration

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1\int_0^1 \left(h(\frac{s+k}{N},s) - h(\frac{k}{N},s)\right) ds\, du \\
&- \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1\int_0^1 \left(h(\frac{s+k}{N},u) - h(\frac{k}{N},u)\right) ds\, du \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{[Nt]-1}\int_0^1\int_0^1 \left(h(\frac{k}{N},s) - h(\frac{k}{N},u)\right) ds\, du \\
&= C + D + E
\end{aligned}$$

- On a $E = 0$,

$$\|C\| \leqslant \frac{1}{2N}\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_{C^0} \text{ et } \|D\| \leqslant \frac{1}{2N}\left\|\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_{C^0}.$$

$\square$

$C^{1,\widehat{m}}$-densité

Corollaire.– *Soient* $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert,* $E = C \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} C$ *le fibré trivial sur le cube* $C = [0,1]^m$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ *et* $f_0 : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que :*

$$\forall c = (c_1, ..., c_m) \in [0,1]^m, \quad \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) \in \; IntConv(\mathcal{R}_c, \sigma(c))$$

où $\mathcal{R}_c = \pi^{-1}(c) \cap \mathcal{R}$. *Alors, pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que :*

i) $\dfrac{\partial f}{\partial c_m} \in \Gamma(\mathcal{R})$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial c_m}$ *est homotope à* σ *dans* $\Gamma(\mathcal{R})$

iii) $\|f - f_0\|_{C^{1,\widehat{m}}} \leq \epsilon$.

$C^{1,\widehat{m}}$-densité

Notation.– Dans cet énoncé, on a noté

$$\|f\|_{C^1,\widehat{m}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, ..., \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0})$$

la norme C^1 sans le terme $\|\dfrac{\partial f}{\partial c_m}\|_{C^0}$.

$C^{1,\widehat{m}}$-densité

Démonstration.– Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $c = (c_1, ..., c_m) \in C$, on définit

$$f(c_1, ..., c_m) := f_0(c_1, ..., c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, ..., c_{m-1}, s, Ns)ds.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1, ..., c_m) = h(c_1, ..., c_{m-1}, c_m, Nc_m) \in \mathcal{R}_c$$

et $\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1, ..., c_m)$ est homotope à $\sigma(c)$ par

$$\sigma_u(c) := h_u(c_1, ..., c_{m-1}, c_m, Nc_m)$$

où h_u est la contraction décrite dans la remarque qui suit le lemme fondamental.

$C^{1,\widehat{m}}$-densité

La démonstration de la proposition précédente montre que

$$\|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

En reprenant la même démarche, on montre que l'on a également

$$\|\frac{\partial f}{\partial c_j} - \frac{\partial f_0}{\partial c_j}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

pour tout $j \in \{1, ..., m-1\}$. $\square$