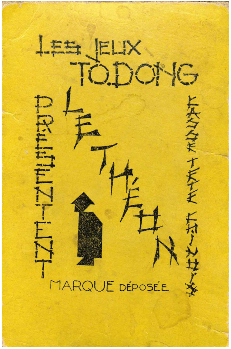
Le paradoxe de Hausdorff

Vincent Borrelli

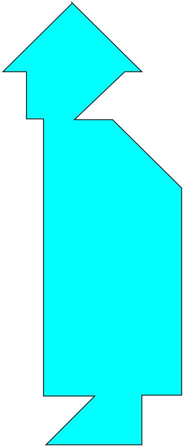
Université Ouverte-Université Lyon 1

Cycle 18 : *Coups de théâtre en mathématiques*

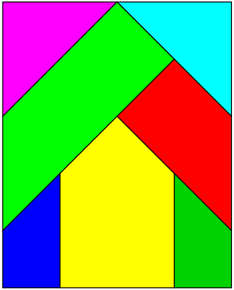
Le Théon

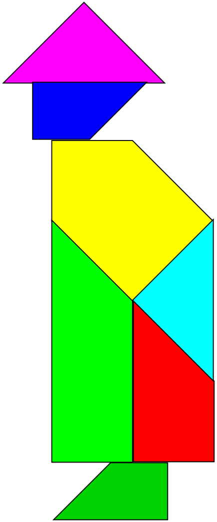

LES JEUX
TO.DONG
PRÉSENTENT
LE THÉON
CASSE TÊTE CHINOIS
MARQUE DÉPOSÉE

Le vieux tankinais

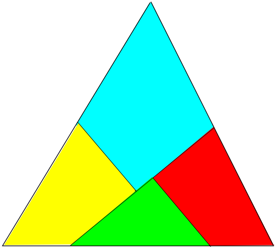


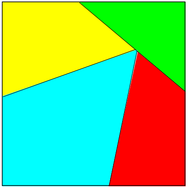
Un tangram



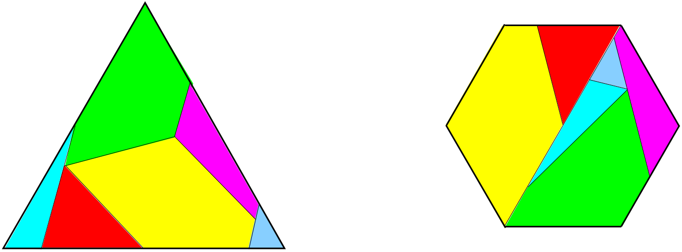


Le puzzle de Dudeney

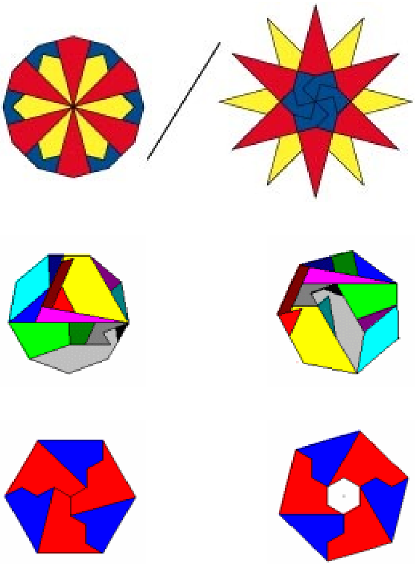




Découpage de polygones



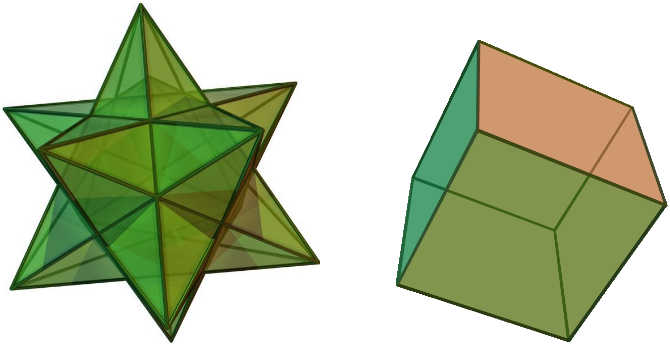
Autres exemples



Définition. – On dit qu'un objet se *décompose* en un autre si on peut le découper en un nombre fini de morceaux de telle façon, qu'après réarrangement des morceaux, on obtienne l'autre objet.

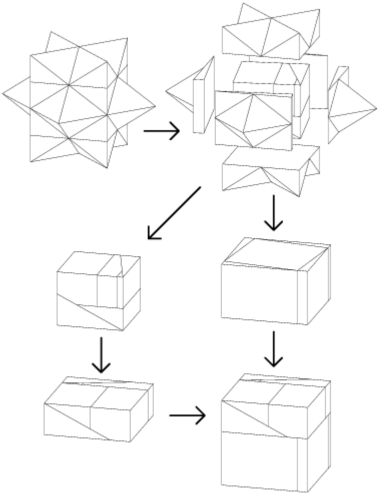
Bien sûr le réarrangement doit se faire sans briser ni déformer les morceaux.

Un exemple chez les solides



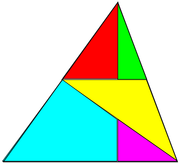
Le petit dodécaèdre étoilé se décompose en un cube.

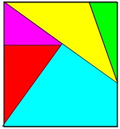
La preuve !



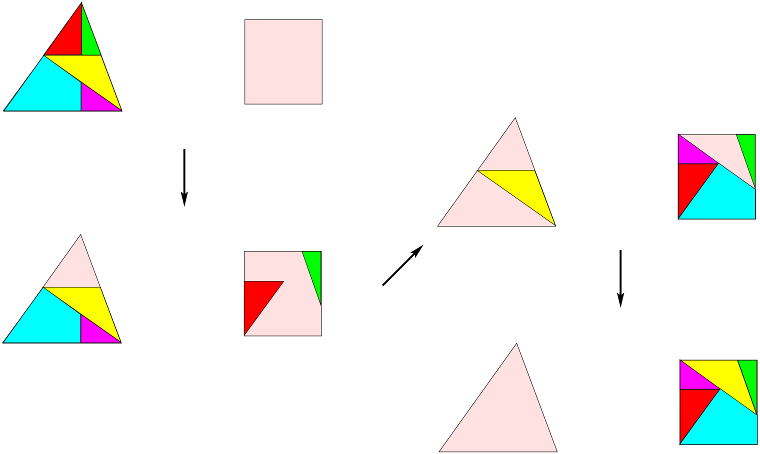
Dissection géométrique

Théorème (Hadwiger et Gur, 1954). – *Deux polygones de même aire se décomposent l'un en l'autre. De plus on peut toujours effectuer le découpage de telle façon que, lors du réassemblage, on ne procède qu'à des translations et des demi-tours.*

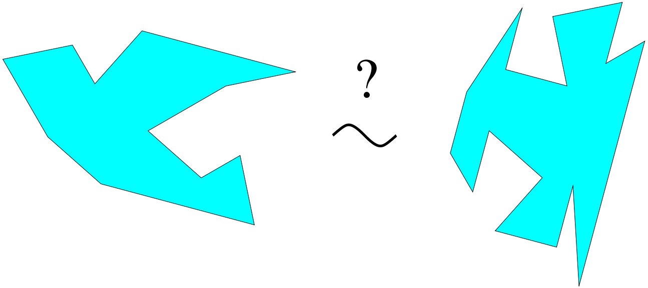




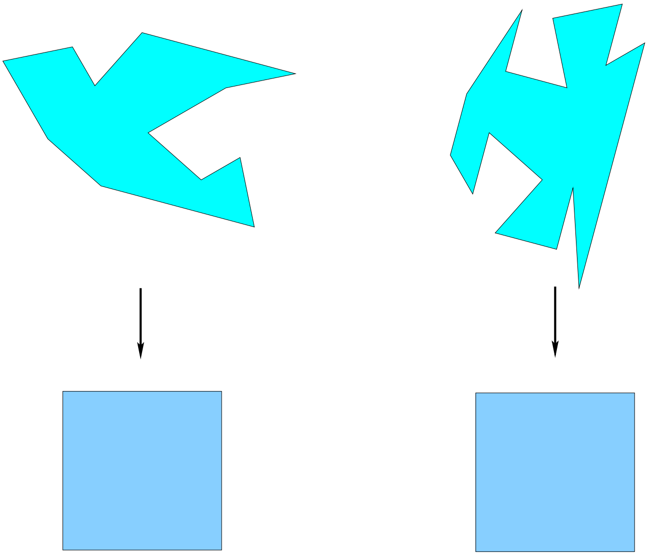
Le résultat de Hadwiger et Gur illustré



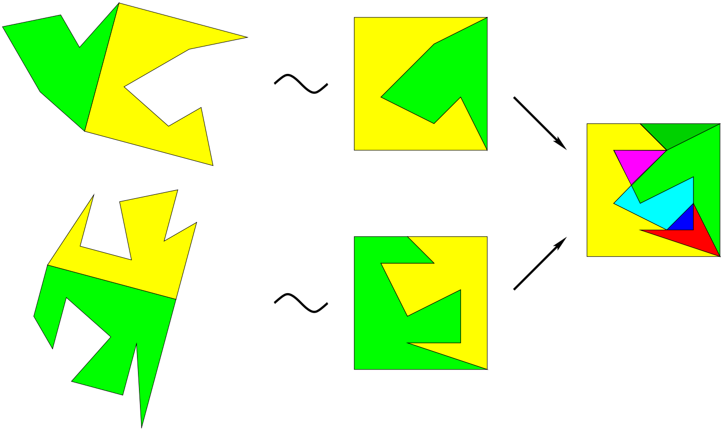
Le problème



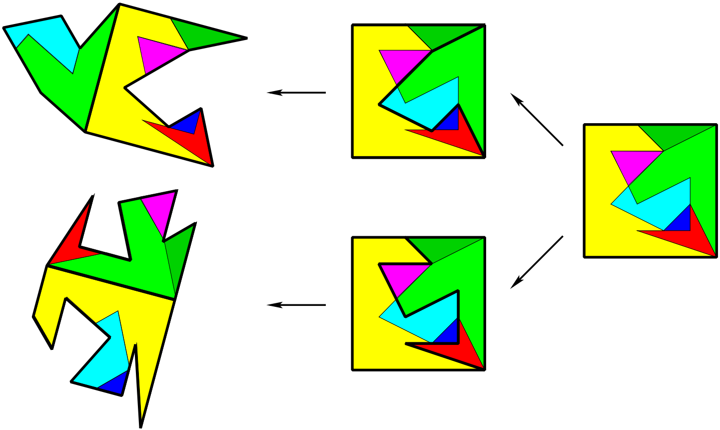
Quadratures



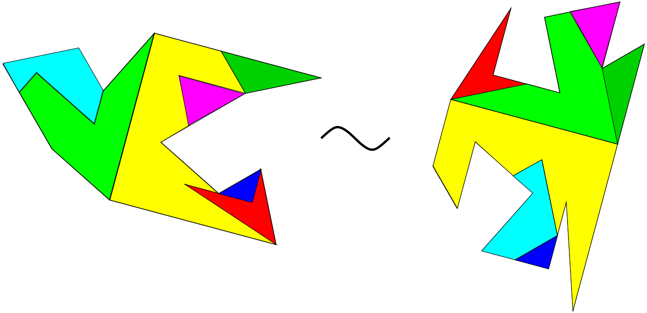
Subdivisions



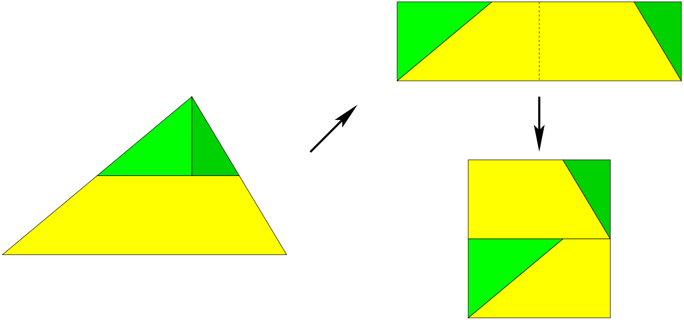
Subdivisions : le retour



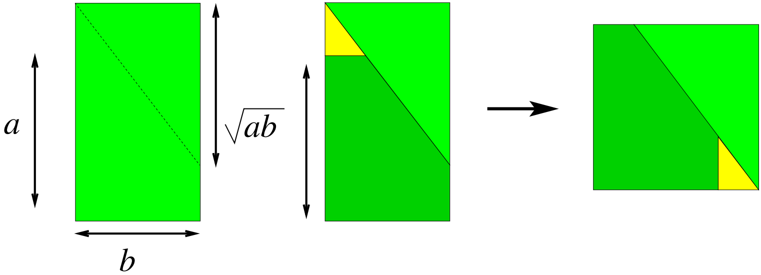
D'un polygone à l'autre



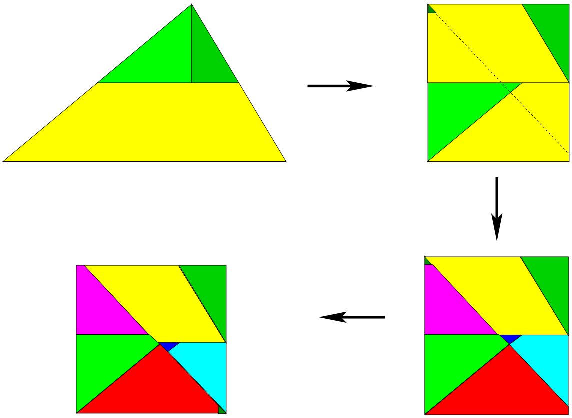
Du triangle au rectangle : Abul Wafa



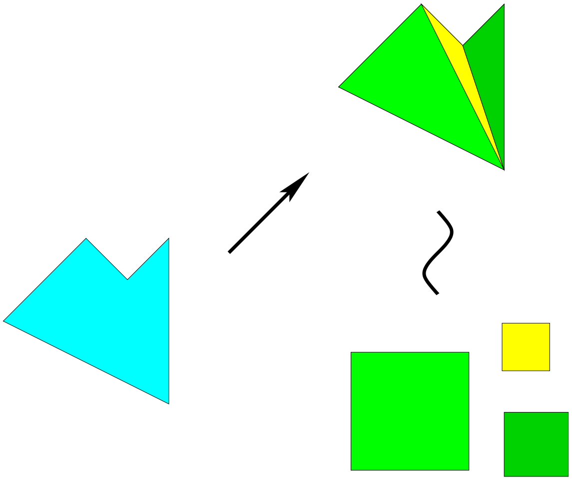
Du rectangle au carré : Jean-Etienne Montucla



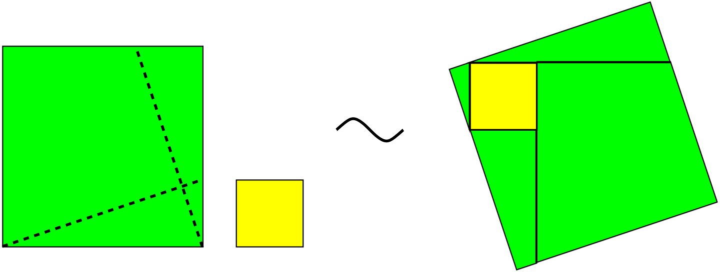
Du triangle au carré



Polygone en carrés

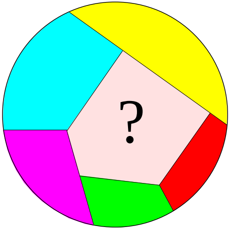


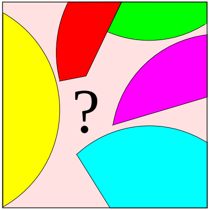
Pythagore



Le cas du disque

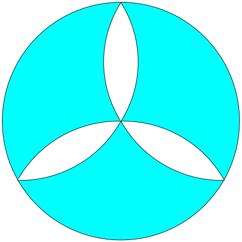
Question (Tarski 1924). – Est-il possible de décomposer le disque en un carré ?

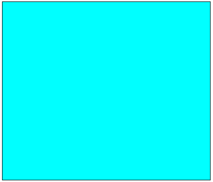




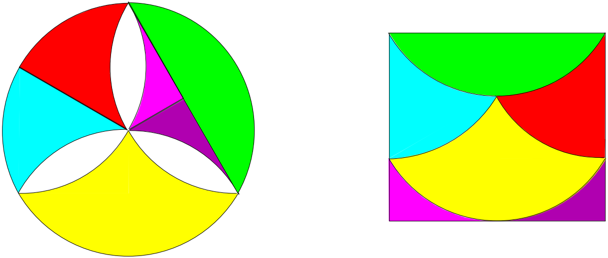
La raie manta

La *raie manta* se décompose en un rectangle...



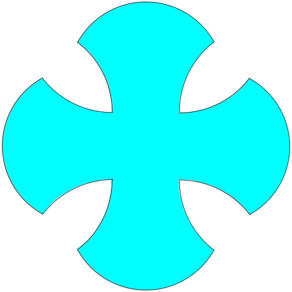


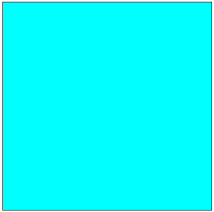
...avec 6 pièces seulement !



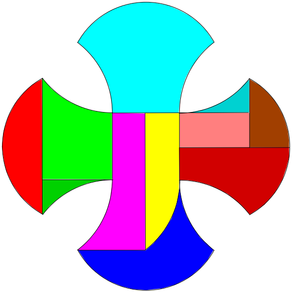
La croix grecque (I)

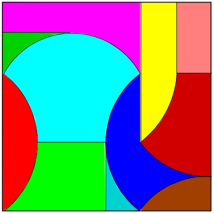
La croix grecque se décompose en un carré.





La croix grecque (II)





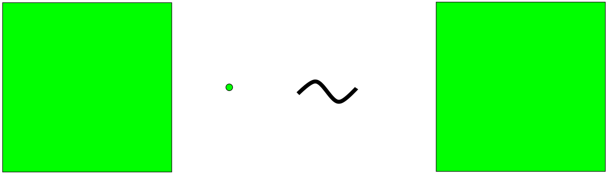
Le puzzle de Laczkovich

Théorème (1990). – *Le disque se décompose en un carré. De plus on peut effectuer le découpage de telle façon que, lors du réassemblage, on ne procède qu'à des translations.*

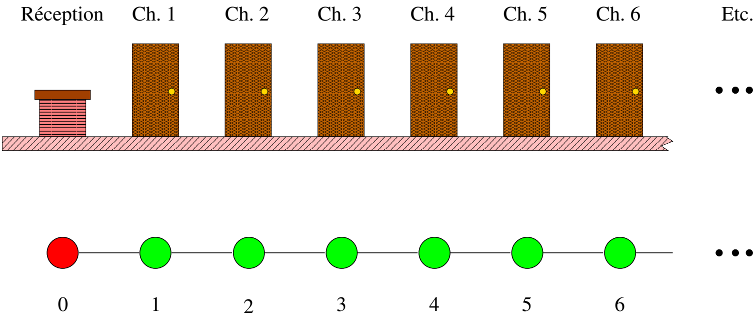
Le nombre de pièces du puzzle est estimé à 10^{50}, c'est-à-dire plus que de molécules d'eau contenues dans les océans du globe.

Un résultat intrigant

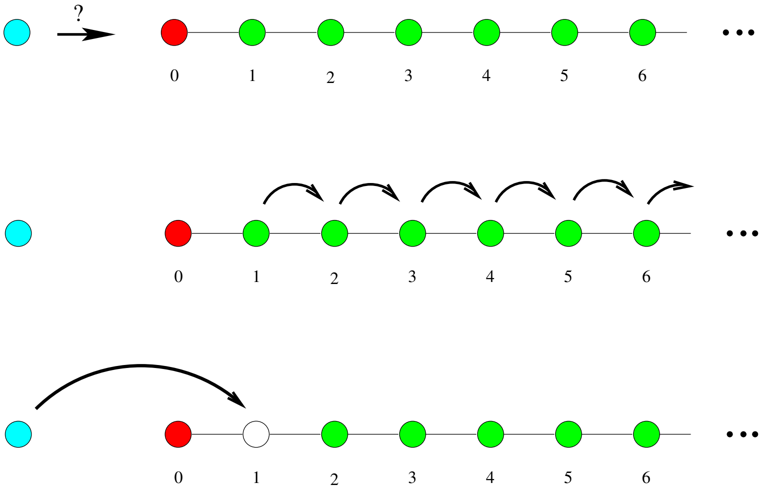
Un carré et un point se décomposent en un carré !



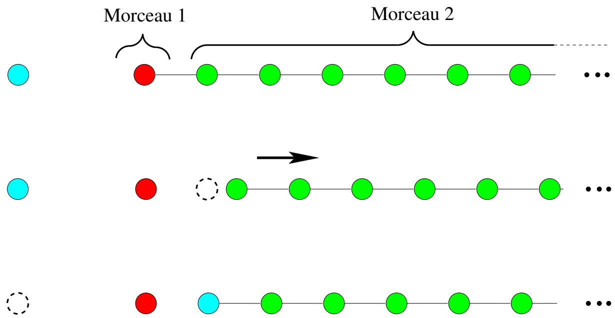
L'hôtel infini de Hilbert



Complet ?

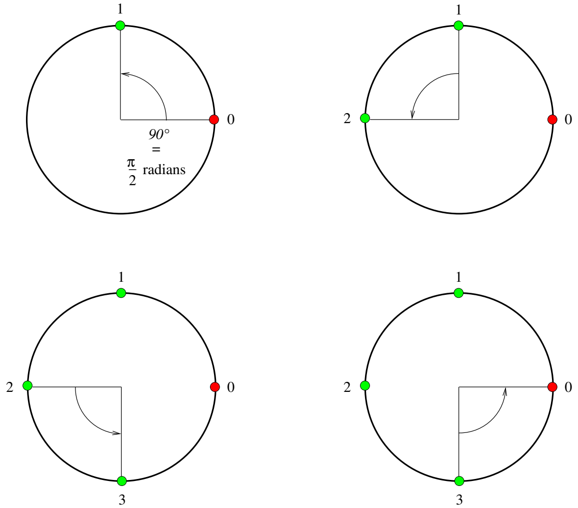


Une étrange décomposition

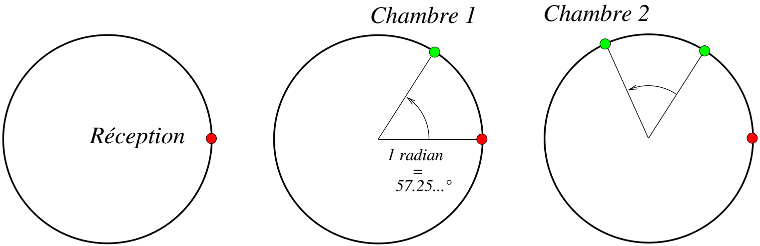


Un hôtel de Hilbert et un point se décomposent en un hôtel de Hilbert.

Ca ne tourne pas rond ?

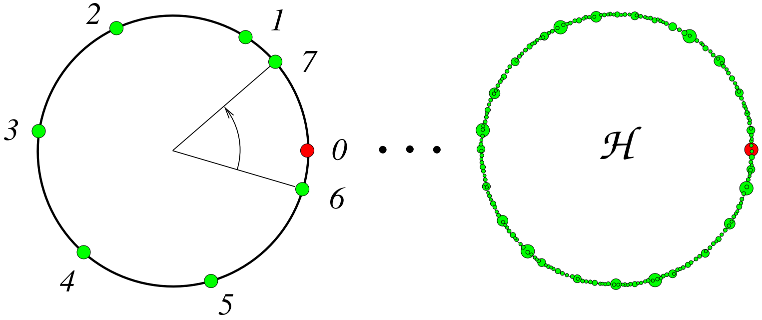


Un hôtel de Hilbert sur un cercle (I)



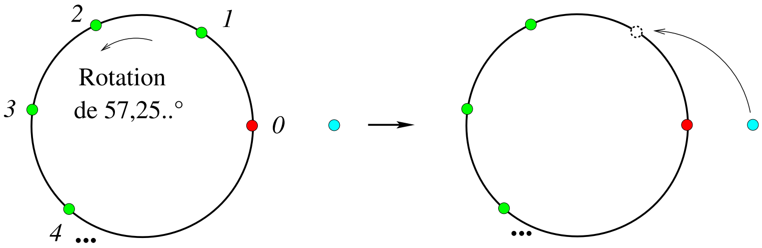
etc...

Un hôtel de Hilbert sur un cercle (II)

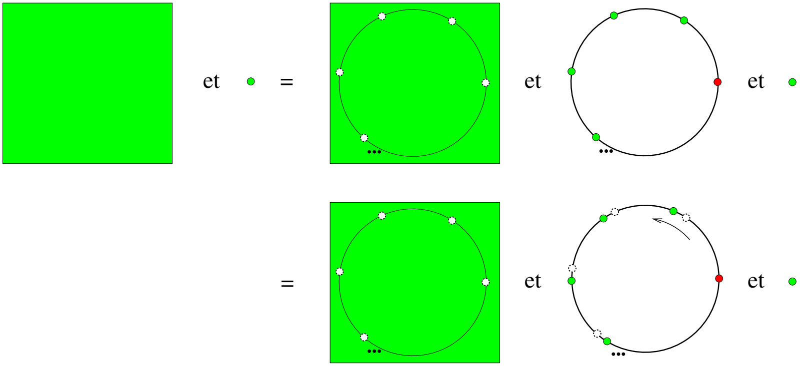


Un hôtel de Hilbert sur un cercle (III)

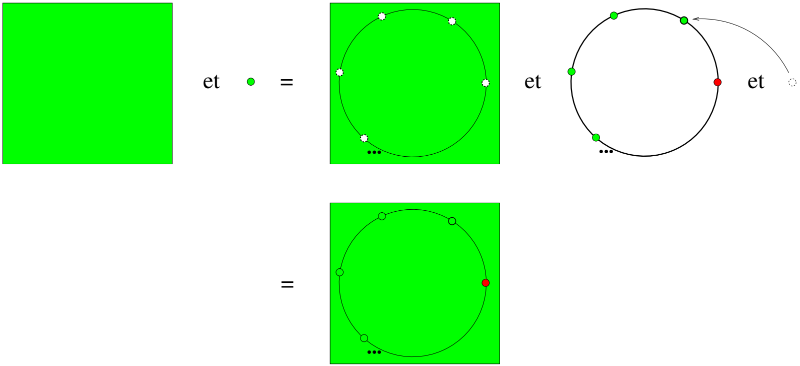
Un hôtel de Hilbert (sur un cercle) et un point se décomposent en un hôtel de Hilbert (sur un cercle).



Points et carré (I)

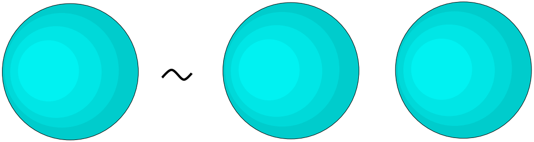


Points et carré (II)

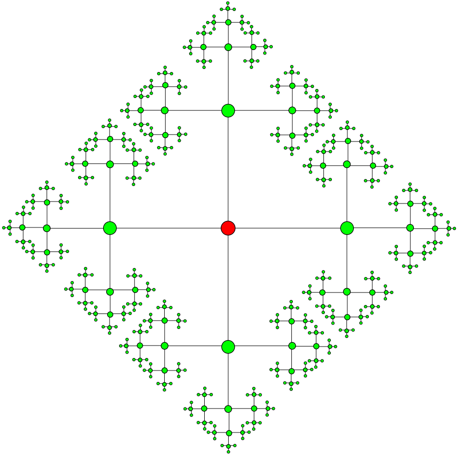


Le paradoxe de Hausdorff

Théorème (1914). – *La sphère se décompose en deux sphères de même rayon !*



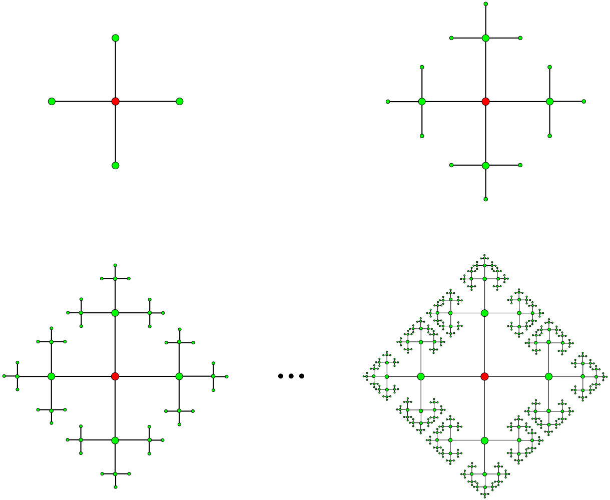
L'hôtel infini de Cayley



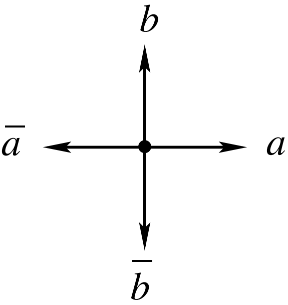
Nom scientifique :

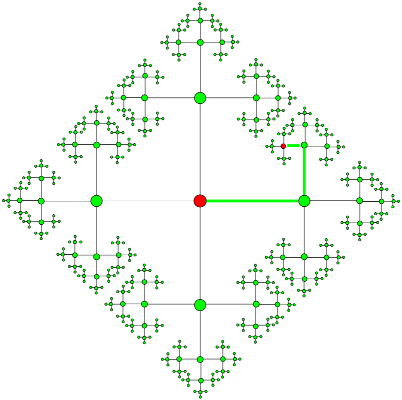
Graphe de Cayley du bouquet de deux cercles

Construction de l'hôtel de Cayley



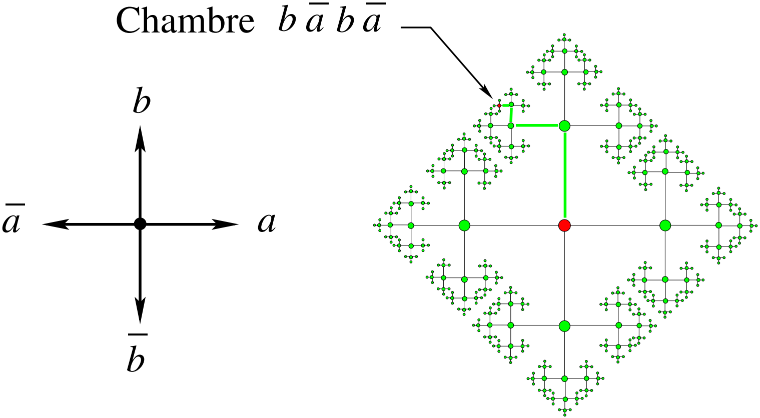
Comment accéder à sa chambre ? (I)



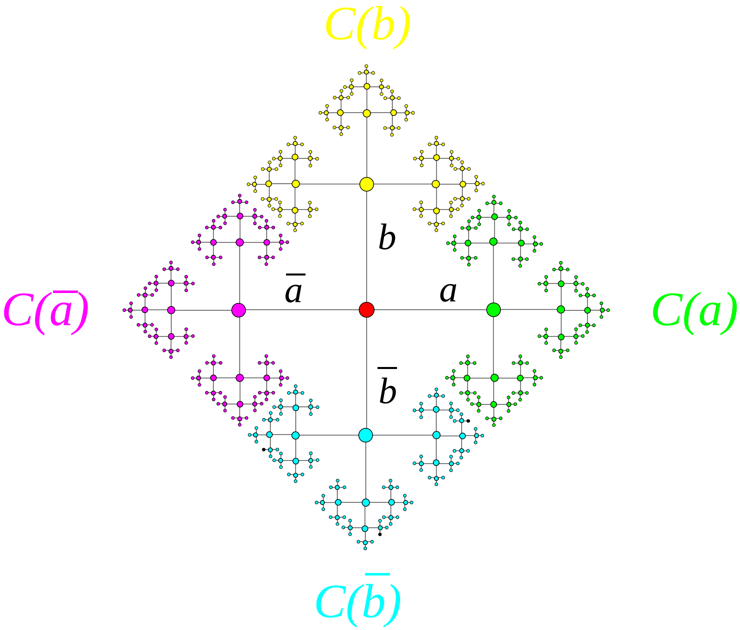


« Chambre $ab\bar{a}$ je vous prie ».

Comment accéder à sa chambre ? (II)



« Chambre *$b\bar{a}b\bar{a}$* je vous prie ».


$C(b)$
b
$C(\overline{a})$
$\overline{a}$
a
$C(a)$
$\overline{b}$
$C(\overline{b})$

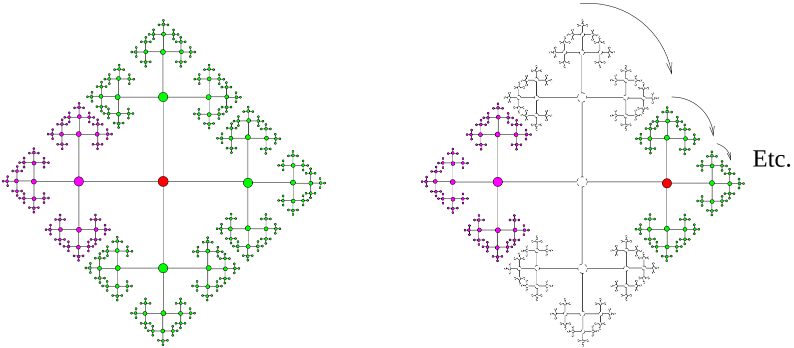
Le b, a, ba de l'hôtel de Cayley

L'hôtel de Cayley se compose de la réception et de quatre cantons :

- $C(a) =$ toutes les chambres qui commencent par a.
- $C(\bar{a}) =$ toutes les chambres qui commencent par $\bar{a}$.
- $C(b) =$ toutes les chambres qui commencent par b.
- $C(\bar{b}) =$ toutes les chambres qui commencent par $\bar{b}$.

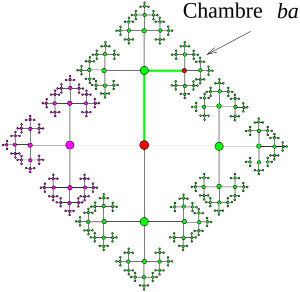
Remarque. – $a\bar{a} = \bar{a}a = b\bar{b} = \bar{b}b = \textit{réception}$.

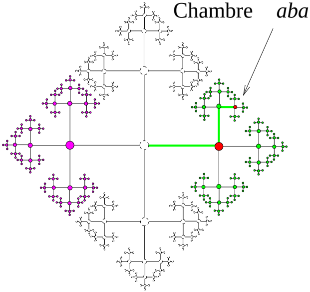
Complet ?



- Si ma chambre commence par $\bar{a}$, je ne bouge pas.
- Sinon, pour connaître ma nouvelle chambre, j'écris a devant le nom de mon ancienne chambre.

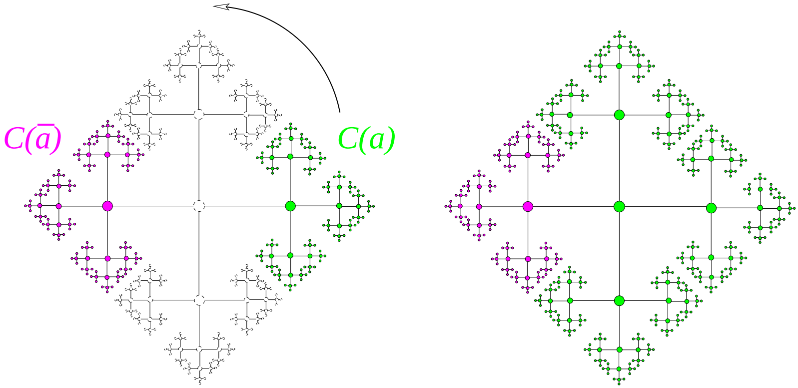
Un exemple





J'habitais chambre *ba*, je vais à la chambre *aba*.

4<2 ?



On peut reconstruire l'hôtel de Cayley à partir de deux cantons.

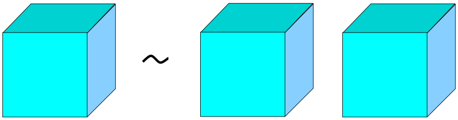
Ex uno plura

Bilan.

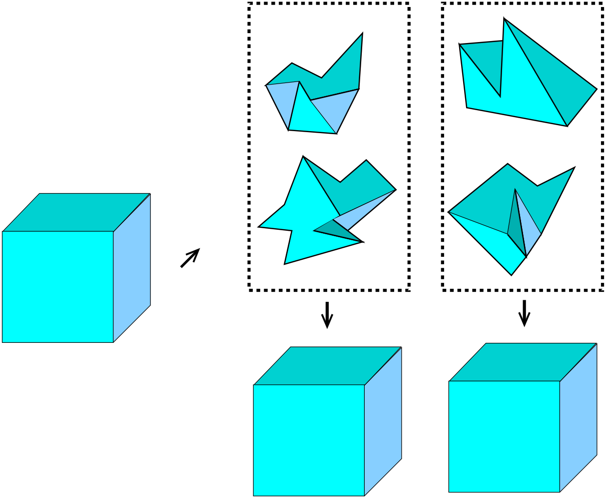
- On peut reconstruire l'hôtel de Cayley à partir de deux cantons.
- Puisque l'hôtel de Cayley est constitué de 4 cantons (et de la réception), on peut donc construire, non pas un, mais *deux* hôtels de Cayley.
- On a ainsi dédoublé l'hôtel de Cayley !

Le paradoxe de Banach-Tarski

Théorème (1924). – *Le cube plein se décompose en deux cubes pleins identiques à celui de départ !*



Un problème volumineux



Il existe des morceaux qui pour lesquels la notion de volume n'a pas de sens !

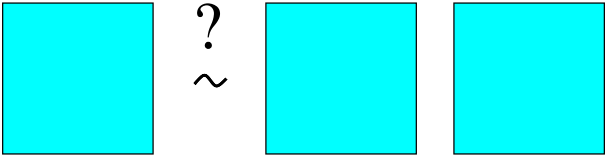
Echec et mat pour le volume

Théorème. – *Il n'existe aucun moyen de réparer ce défaut.*

Même en modifiant (raisonnablement) ce que l'on entend par *volume*, il y a toujours des objets pour lesquels la notion de volume n'a pas de sens...

Un autre plan ?

Question. – *Un carré est-il décomposable en deux carrés identiques à celui de départ ?*



Aire *versus* Volume

Théorème. – *On peut mesurer l'aire de* tous *les morceaux du plan*.

Conséquence 1. – Un carré n'est pas décomposable en deux carrés identiques à lui-même.

Conséquence 2. – Le plan ne se comporte pas de façon analogue à l'espace tout entier.

Bibliographie