

la Gazette

des **Mathématiciens**



- **Mathématiques** – Les points rationnels
- **Interactions** – Aux racines de la cognition mathématique
- **Entretien** – avec Caucher Birkar et Alessio Figalli
- **Raconte-moi...** les plongements de Nash-Kuiper

Société
Mathématique
de France





... les plongements de Nash-Kuiper

• V. BORRELLI

On a coutume d'appeler *plongement de Nash-Kuiper* tout plongement isométrique obtenu à partir des principes de construction exposés dans les années 50 par John Nash et Nicolaas Kuiper dans deux articles restés célèbres [22, 18]. Ces plongements ont immédiatement intrigué la communauté par leur faible régularité – seulement C^1 – et par le caractère paradoxal des objets géométriques qu'ils permettent de créer. Dans ce *Raconte-moi*, nous mettons plus particulièrement l'accent sur l'un d'entre eux : la *sphère réduite*.

1. La rigidité des sphères

On sait depuis 1900 et les travaux de Heinrich Liebmann que les sphères sont des objets rigides, elles ne peuvent être déformées isométriquement. On dit qu'une application de la sphère S^2 dans un espace euclidien E^3 est isométrique si elle préserve la longueur de toutes les courbes tracées sur S^2 . Si l'on s' imagine la sphère comme étant réalisée matériellement, la condition d'isométrie signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux applications qui n'étirent ni ne contractent le matériau. Le résultat de Liebmann énonce que toute application isométrique de classe C^2 de la sphère dans l'espace euclidien tridimensionnel $E^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est la restriction d'une isométrie globale de E^3 , c'est-à-dire d'un déplacement ou d'un anti-déplacement [20]. Ce résultat n'est pas propre à la sphère, Stephan Cohn-Vossen le généralise en 1927 aux *ovoïdes*, c'est-à-dire aux surfaces fermées sans bord et à courbure de Gauss strictement positive [8]. Il montre de plus que cette rigidité cesse dès que l'on ôte une portion quelconque de l'ovoïde. Autant qu'on puisse en juger, ces résultats sont conformes à l'expérience. Une balle de ping-pong est indéformable sauf à la « poquer » c'est-à-dire à réduire brutalement sa régularité à celle du continu. En revanche, elle devient légèrement déformable après la découpe d'une calotte¹. Si l'on admet en première approximation que le celluloid

n'est ni étirable ni contractile, cette déformation peut être considérée comme isométrique. Théorie et sens commun sont donc au diapason... mais cette belle harmonie ne va pas durer.

2. Le théorème de Nash-Kuiper

Les articles de Nash et Kuiper vont en effet ajouter quelques notes dissonantes et mettre en tension le couple théorie/intuition. Le responsable de cette disharmonie est le résultat suivant, obtenu en codimension supérieure à deux par Nash en 1954 puis étendu au cas de la codimension un par Kuiper en 1955 :

Théorème 1 (Théorème de Nash-Kuiper). *Tout plongement strictement court $f_0 : (M^m, g) \rightarrow E^q$ d'une variété riemannienne de dimension m dans un espace euclidien de dimension $q > m$ peut être approché au sens C^0 par un plongement C^1 -isométrique.*

Un plongement est dit *strictement court* si la longueur des courbes tracées sur la variété est strictement plus grande que celle des courbes images². Par exemple, si la variété riemannienne est la sphère unité S^2 alors toute homothétie de rapport $k < 1$ fournit un plongement court dont l'image est une sphère de rayon k . Le théorème affirme que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un plongement isométrique

1. Si vous réalisez l'expérience, n'hésitez pas à enlever une calotte relativement importante afin d'obtenir un résultat tangible.
2. Précisément, on demande $f_0^*(\dots) \leq K g$ où $0 < K < 1$ est constant.

$f_\epsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ qui est ϵ -proche de f_0 au sens C^0 i. e.

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^2} \|f_\epsilon(x) - f_0(x)\| \leq \epsilon.$$

En particulier, si ϵ est choisi tel que $k + \epsilon < 1$ alors l'application f_ϵ envoie isométriquement la sphère unité dans une boule de rayon $k + \epsilon < 1$.

Corollaire 1. *On peut plonger C^1 -isométriquement la sphère unité dans une boule de rayon arbitrairement petit.*

L'image de la sphère par un tel plongement est appelée une *sphère réduite* et sa simple existence constitue un pied de nez aux résultats de rigidité de Liebmann et Cohn-Vossen.

3. Vie et mort de la dimension de Janet

Un résultat célèbre de Hassler Whitney énonce que toute variété de dimension m admet un plongement C^∞ dans \mathbb{R}^{2m} , autrement dit, il existe une application $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ de classe C^∞ réalisant un homéomorphisme sur son image et dont la différentielle df_x en chaque point $x \in M^m$ est injective [26, 27]. Si la variété (M^m, g) est compacte, en faisant suivre ce plongement par une homothétie h de rapport suffisamment petit, l'application composée $f_0 = h \circ f$ est strictement courte et, d'après le théorème de Nash-Kuiper, tout choix de $\epsilon > 0$ fournit un plongement isométrique f_ϵ de cette variété riemannienne dans un espace euclidien de dimension $2m$. Ce fait est déjà en lui-même très étonnant puisque localement la condition d'isométrie fait apparaître $\frac{m(m+1)}{2}$ équations : si \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^m et si $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ sont les coefficients de la métrique g , alors $f : (\mathcal{U}, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$ préserve la longueur des courbes si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq m$ on a

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}.$$

Génériquement, pour espérer avoir une solution au problème du plongement isométrique, on s'attend donc à ce que la dimension de l'espace d'arrivée q soit au moins égale au nombre de contraintes appelé *dimension de Janet* :

$$s_m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Et c'est effectivement ce qu'il advient dans le cas analytique. Ludwig Schläfli conjecture en 1871 que $q = s_m$ suffit pour le problème local [23], Maurice Janet et Élie Cartan le démontrent en 1927 [16, 6]. Mais là encore, le théorème de Nash-Kuiper vient tout bousculer. Au prix de la baisse drastique de régularité que constitue le passage de l'analytique à la classe C^1 , il substitue à la dimension de Janet, quadratique en m , une fonction linéaire.

4. Anémie d'une hypothèse métrique

La dissolution de la dimension de Janet met en évidence un point remarquable du théorème de Nash-Kuiper : l'hypothèse métrique – à savoir le caractère strictement court du plongement – est quasi-indolore. Elle disparaît complètement si la variété est compacte puisque, comme on l'a vu, seul compte dans ce cas l'existence d'un plongement. Si la variété est non compacte, Kuiper montre en 1959 que l'existence d'un plongement dans \mathbb{R}^q n'implique pas nécessairement celle d'un plongement strictement court dans \mathbb{E}^q . En revanche, il est toujours possible d'en obtenir un dans \mathbb{E}^{q+1} [17]. Dans le cas non compact, l'hypothèse métrique peut donc forcer l'ajout d'une dimension. Il s'avère que cet ajout n'est pas nécessaire pour une vaste famille de variétés non compactes et en particulier pour l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 . C'est la raison pour laquelle le théorème de Nash-Kuiper permet aussi de déduire l'existence d'un plongement isométrique C^1 de cet espace dans \mathbb{E}^3 , un résultat qui contraste une nouvelle fois avec ce qui était établi auparavant : l'impossibilité démontrée par David Hilbert en 1901 de plonger isométriquement l'espace hyperbolique de façon analytique³ [14].

5. Réductionnisme aiguë

Ainsi, que la variété (M^m, g) soit compacte ou non, il existe un plongement court f_0 de celle-ci dans \mathbb{E}^q avec $q \leq 2m + 1$. Choisissons un nombre $r > 0$ de préférence petit et considérons la boule ouverte $B(r)$ de rayon r de \mathbb{E}^q . Quitte à composer f_0 par un difféomorphisme strictement court⁴ $\varphi : \mathbb{E}^q \rightarrow B(r/2)$, on peut toujours supposer que l'image de f_0 est incluse dans une boule de rayon $r/2$. En prenant $0 < \epsilon < r/2$ dans le théorème de

3. Le résultat de Hilbert sera démontré en régularité C^2 par Nikolai Efimov en 1964 [21].

4. Dans le cas non compact, une simple homothétie ne suffit pas.

Nash-Kuiper, on obtient un plongement isométrique C^1 de la variété dans une boule $B(r) \subset \mathbb{E}^q$. On peut donc non seulement réduire les sphères mais également toutes les variétés riemanniennes compactes ou non.

6. Courbure

Le théorème de Nash-Kuiper révèle que le monde des plongements isométriques se métamorphose complètement lorsque l'on place le curseur de la régularité sur la classe C^1 . Le point clé est que le *tenseur de courbure*, le plus célèbre des invariants de la géométrie riemannienne, nécessite deux ordres de dérivation pour être défini et que c'est lui qui, bien souvent, fournit la première obstruction à l'existence de plongements isométriques. À titre d'illustration, considérons le cas des sphères réduites. Une telle sphère est l'image par un plongement isométrique de la sphère unité dans une boule de rayon $r < 1$. Imaginons qu'une telle sphère existe en régularité C^2 et notons-la Σ^2 . Sous cette régularité, le tenseur de courbure existe et il est préservé par le plongement isométrique. La dimension étant deux, il se réduit à un seul nombre appelé la *courbure de Gauss*. Celle-ci vaut un pour la sphère unité et, puisqu'elle est conservée, elle vaut également un pour Σ^2 . Diminuons le rayon de la boule qui contient Σ^2 jusqu'à ce que son bord vienne toucher la sphère réduite. On montre, et c'est assez intuitif, qu'au point(s) de contact la courbure de Σ^2 doit être supérieure ou égale à la courbure de la sphère qui constitue le bord de la boule. Cette dernière courbure vaut $1/r^2$ où r est le rayon de la boule. Il faut donc nécessairement que $r \geq 1$, en contradiction avec notre hypothèse. En fin de compte, la courbure fait bel et bien obstruction à l'existence des sphères réduites en classe C^2 .

7. H-principe

En classe C^1 , l'absence d'un tenseur de courbure invalide le raisonnement précédent. Il reste malgré tout très étonnant qu'aucune autre obstruction n'apparaisse et que l'on puisse effectivement réaliser des sphères réduites. Cette constatation, ainsi que quelques autres relatives à différents domaines de la géométrie différentielle, seront la

source d'un questionnement qui conduira Mikhaïl Gromov à découvrir la notion de *h-principe*⁵ dans les années 70 [12]. Ce principe nomme une propriété des systèmes différentiels qui, lorsqu'elle est satisfaite, réduit la recherche de solutions à une question topologique. Le résultat de Nash-Kuiper montre que les équations aux dérivées partielles qui traduisent la préservation de la longueur satisfont au *h-principe*. C'est la raison pour laquelle, dans leur théorème, l'hypothèse métrique s'évanouit : l'existence d'un plongement isométrique se déduit de celle d'un simple plongement, c'est-à-dire d'un problème de nature essentiellement topologique⁶.

8. Le défaut isométrique

Comment ces plongements isométriques sont-ils construits par Nash et Kuiper ? Le point de départ est le plongement court f_0 que l'on va déformer itérativement pour réduire à chaque étape le *défaut isométrique* Δ . Voyons de quoi il retourne. La longueur d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^m$ tracée sur (M^m, g) est donnée par l'intégrale

$$\text{Long}(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt$$

et celle de la courbe image par

$$\text{Long}(f_0 \circ \gamma) = \int_0^1 \langle df_0(\gamma'(t)), df_0(\gamma'(t)) \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Dans cette dernière intégrale, pour ne pas alourdir l'écriture, nous n'avons pas fait apparaître la dépendance au point $\gamma(t)$ de la différentielle df_0 . La différence $\Delta_x(\cdot, \cdot) := g_x(\cdot, \cdot) - \langle d_x f_0(\cdot), d_x f_0(\cdot) \rangle$ représente donc l'écart à la situation isométrique au point $x \in M^m$; on l'appelle le *défaut isométrique*. Notons que, puisque f_0 est strictement courte, Δ_x est un produit scalaire. Sur chaque carte $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ de la variété, ce défaut définit une application $\Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ à valeurs dans l'espace des formes bilinéaires symétriques définies positives de \mathbb{R}^m . Cet espace est un cône convexe ouvert de dimension s_m , la dimension de Janet, dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^m)$ des applications bilinéaires symétriques de \mathbb{R}^m . Son bord contient tous les carrés $\ell \otimes \ell$ où ℓ est une forme linéaire de \mathbb{R}^m ; une telle forme bilinéaire est en effet symétrique positive mais dégénérée. Considérons s_m formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_{s_m}$. L'ensemble de toutes

5. Le lecteur intéressé trouvera dans le numéro 122 de la *Gazette* (octobre 2009) un article consacré au *h-principe*.

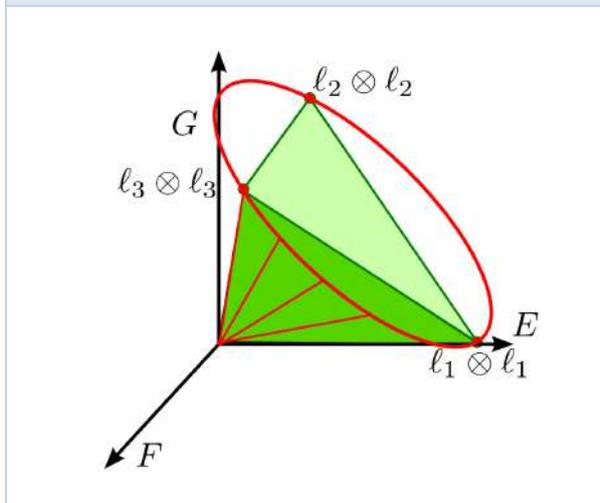
6. Exactement, la condition sur le rang de la différentielle se réduit, via un autre *h-principe* dû à Stephen Smale et Morris Hirsch, à un problème purement topologique [24, 15].

les combinaisons

$$\sum_{i=1}^{s_m} \rho_i \ell_i \otimes \ell_i$$

où les coefficients ρ_i sont strictement positifs est un sous-cône de $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Pour simplifier, nous allons supposer qu'il existe un choix judicieux⁷ des $\ell_1, \dots, \ell_{s_m}$ tel que ce sous-cône soit ouvert et contienne l'image $\Delta(\mathcal{U})$.

Le cône $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^2)$ (en rouge) et le sous-cône engendré par trois carrés de formes linéaires (en vert) représentés dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \{E dx \otimes dx + F(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + G dy \otimes dy \mid (E, F, G) \in \mathbb{R}^3\}$.



Dans ce cas, pour tout $x \in \mathcal{U}$, le défaut isométrique s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des $\ell_i \otimes \ell_i$:

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{s_m} \rho_i(x) \ell_i \otimes \ell_i.$$

Qu'a-t-on gagné? Une stratégie. Cette écriture suggère que pour réduire complètement le défaut isométrique, il suffit de corriger le défaut de longueur des courbes dans les s_m directions duales aux ℓ_i .

9. Corrugations

Commençons par faire disparaître le coefficient ρ_1 . Pour ce faire, on feuillette $f_0(\mathcal{U})$ par des courbes dont les vecteurs tangents sont perpendiculaires à $df_0(\ker \ell_1)$. Puis, en faisant osciller toutes ces

courbes dans la direction normale de façon à augmenter leur longueur, on déforme f_0 en une application $f_{1,1}$ dont le défaut isométrique ne comporte plus le terme $\ell_1 \otimes \ell_1$. C'est tout à fait possible car construire des courbes oscillantes dont la norme de la dérivée est prescrite ne pose pas de difficulté. On ajuste en même temps les fréquences de manière à obtenir des amplitudes d'oscillation compatibles avec la condition d' ϵ -proximité. L'effet des oscillations est de couvrir la surface de vagues à la manière d'une tôle ondulée. On appelle ces ondulations des *corrugations*, un terme introduit par William Thurston lors de ses travaux sur le retournement de la sphère [19]. Il ne reste plus qu'à itérer s_m fois pour obtenir une application f_{1,s_m} dont tous les termes du défaut isométrique ont disparu... sauf que cela ne marche pas! En effet, chaque nouvelle vague d'oscillations vient perturber les précédentes et réintroduit les termes d'erreur tout juste anéantis. L'amplitude de chacune de ces nouvelles erreurs est certes sous contrôle, elle est inversement proportionnelle à la fréquence des oscillations, mais en revanche on ne connaît rien sur son signe. Si celui-ci est négatif, il faut non plus allonger mais raccourcir les longueurs pour espérer faire disparaître l'erreur, or un tel raccourcissement est hors de portée d'une corrugation...

10. La gourmandise est un vilain défaut

Voici comment contourner cette difficulté : plutôt que de vouloir réduire le défaut isométrique directement à zéro, Nash préfère être moins gourmand et se contenter, au moyen des mêmes corrugations, de diminuer ledit défaut de moitié. Et ceci change tout. En effet, diviser chaque coefficient ρ_i par deux préserve leur stricte positivité ce qui autorise à poursuivre l'ajout de corrugations à l'infini. On obtient donc une suite d'applications $(f_{n,s_m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$0 \leq \Delta(f_{n,s_m}) \leq \frac{1}{2} \Delta(f_{n-1,s_m}) \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} \Delta(f_0).$$

Toutefois, le contrôle des perturbations induites par l'ajout de chaque corrugation nécessite de choisir des fréquences de plus en plus élevées ce qui, mécaniquement, force les amplitudes à être de plus en plus faibles. Cet accroissement des fréquences n'affecte pas la convergence C^1 des appli-

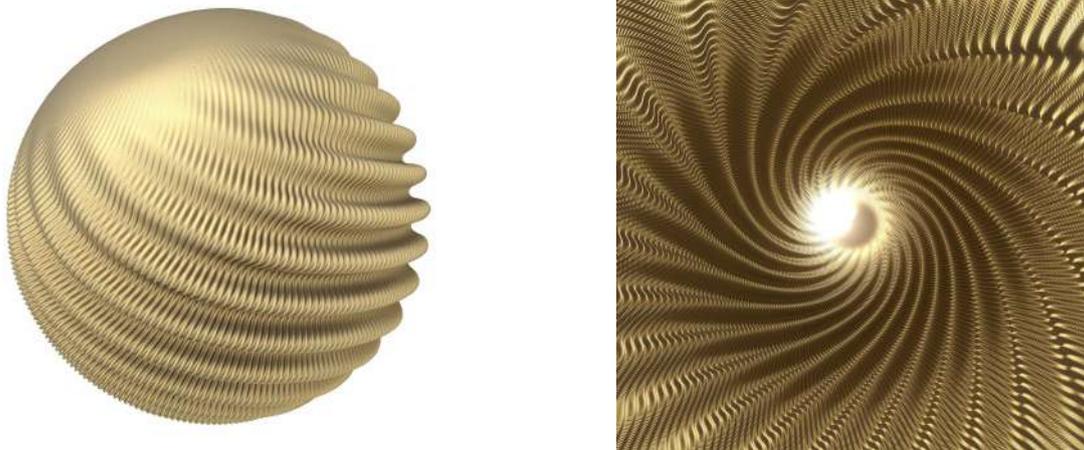
7. Un tel choix n'est évidemment pas toujours possible sauf à réduire la taille de \mathcal{U} .

À gauche, un plongement strictement court f_0 de la sphère unité ; à droite, le plongement $f_{1,1}$ obtenu après corrugation.



© Projet Hévéa

À gauche, une sphère réduite, son diamètre vaut environ la moitié de celui de la sphère unité ; à droite l'accumulation infinie des corrugations vue depuis l'intérieur de la sphère



© Projet Hévéa

cations f_{n,s_m} car on peut assurer par un choix convenable des paramètres la décroissance rapide des amplitudes des oscillations des dérivées premières. En revanche les amplitudes s'envolent pour les dérivées secondes et c'est la raison pour laquelle la convergence n'est pas de classe C^2 . L'application limite f_∞ , qui est évidemment isométrique, possède donc une régularité de classe C^1 .

11. Les fruits de Nash-Kuiper

Les plongements de Nash-Kuiper ont été à l'origine de bien des développements. La méthode de construction a inspiré à Gromov sa théorie de

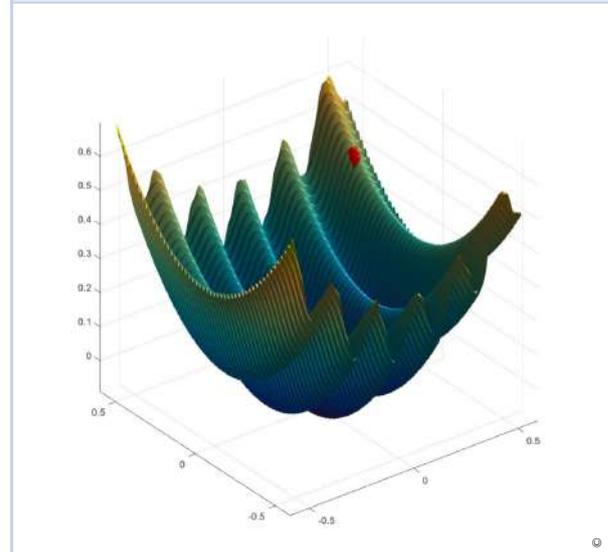
l'intégration convexe, un outil puissant pour résoudre certaines familles de relations différentielles et démontrer l'existence de h -principes [12]. La question de leur régularité $C^{1,\alpha}$ a conduit à conjecturer l'existence d'un réel $\alpha(m)$ dépendant de la dimension et donnant génériquement la régularité maximum. Parmi tous les travaux que cette question a motivés citons ceux de Yurii Borisov [3] en 2004 et ceux de Sergio Conti, Camillo De Lellis et László Székelyhidi [9] en 2012. Un lien inattendu entre l'existence des plongements C^1 de Nash-Kuiper et celle de solutions « sauvages » de l'équation d'Euler brisant la conservation de l'énergie – le fameux *paradoxe de Scheffer-Schnirelmann* – a été mis en évidence en 2010 par De Lellis et Szé-

kelyhidi [10, 11, 25]. Les travaux se poursuivent désormais en direction de l'équation de Navier-Stokes. Tout récemment, Marshall Slemrod et al. ont exploré une autre voie mettant directement en correspondance les solutions de l'équation d'Euler 2D incompressible avec des familles dépendant du temps de plongements isométriques de surfaces dans \mathbb{E}^3 . Leurs travaux suggèrent que l'on pourrait détecter le caractère sauvage d'une solution au moyen de la géométrie de la famille de surfaces duales [1]. La géométrie des surfaces de Nash-Kuiper a été décrite en 2012 par Saïd Jabrane, Francis Lazarus, Boris Thibert et moi-même. Elle a conduit à la mise en évidence de la structure C^1 -fractale : le plongement est C^1 mais le graphe de sa normale est un objet fractal [4]. Des expressions explicites des plongements de Nash-Kuiper ont permis de visualiser⁸ un tore plat [5] en 2012 et une sphère réduite [2] en 2017. Enfin, dans un travail non encore publié, Luca Codenotti et Marta Lewicka utilisent l'intégration convexe pour construire des solutions $C^{1,\alpha}$ de l'équation de Monge-Ampère. Les images qu'ils obtiennent devraient facilement vous convaincre qu'il existe un air de famille avec les plongements de Nash-Kuiper [7].

Bref, le sujet est en pleine ébullition. Dans un article récent intitulé *Geometric, Algebraic and Analytic Descendants of Nash Isometric Embedding*

Theorems, Gromov présente une cascade de questions ouvertes et prédit que « les plus intéressantes d'entre elles nécessiteront un afflux d'idées nouvelles » [13]. Plus de 60 ans après leur parution, les travaux de Nash-Kuiper n'ont certainement pas encore donné tous leurs fruits.

Image tirée de [7] et montrant une solution de l'équation de Monge-Ampère construite par intégration convexe



Références

- [1] A. ACHARYA et al. « Fluids, elasticity, geometry, and the existence of wrinkled solutions ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **226**, n° 3 (2017), p. 1009-1060.
- [2] E. BARTZOS et al. « An Explicit Isometric Reduction of the Unit Sphere into an Arbitrarily Small Ball ». *Foundations of Computational Mathematics* **18**, n° 4 (2018), p. 1015-1042.
- [3] Y. F. BORISOV. « Irregular $C^{1,\beta}$ -Surfaces with an Analytic Metric ». *Siberian Mathematical Journal* **45**, n° 1 (2004), p. 19-52.
- [4] V. BORRELLI et al. « Flat tori in three-dimensional space and convex integration ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2012).
- [5] V. BORRELLI et al. « Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space ». *Ensaio Matemáticos* **24** (2013), p. 1-91.
- [6] É. CARTAN. « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ». *Ann. Soc. Polon. Math.* **6** (1927), p. 1-7.
- [7] L. CODENOTTI et M. LEWICKA. « Visualization of the convex integration solutions to the Monge-Ampère equation ». *arXiv preprint arXiv:1807.06730* (2018).
- [8] S. COHN-VOSSEN. « Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. » *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* **1927** (1927), p. 125-134.
- [9] S. CONTI, C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI. « H-principle and rigidity for $C^{1,\alpha}$ isometric embeddings ». In : *Nonlinear partial differential equations*. Springer, 2012, p. 83-116.
- [10] C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI JR. « The Euler equations as a differential inclusion ». *Annals of mathematics* (2009), p. 1417-1436.

8. Le lecteur pourra trouver de nombreuses images en haute définition sur le site du *Projet Hévéa* : <http://hevea-project.fr>

- [11] C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI. « On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations ». *Archive for rational mechanics and analysis* **195**, n° 1 (2010), p. 225.
- [12] M. GROMOV. *Partial differential relations, volume 9 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)[Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. 1986.
- [13] M. GROMOV. « Geometric, algebraic, and analytic descendants of Nash isometric embedding theorems ». *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**, n° 2 (2017), p. 173-245.
- [14] D. HILBERT. « Ueber Flächen von constanter Gausssscher Krümmung ». *Transactions of the American mathematical Society* **2**, n° 1 (1901), p. 87-99.
- [15] M. W. HIRSCH. « Immersions of manifolds ». *Transactions of the American Mathematical Society* **93**, n° 2 (1959), p. 242-276.
- [16] M. JANET. « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ». *Annales de la Société Polonaise de Mathématique T. 5 (1926)* (1927).
- [17] N. H. KUIPER. « Isometric and short imbeddings ». *Indag. Math* **21** (1959), p. 11-25.
- [18] N. H. KUIPER. « On C^1 -isometric imbeddings. I ». In : *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. Vol. 58. Elsevier. 1955, p. 545-556.
- [19] S. LEVY et W. P. THURSTON. *Making waves: A guide to the ideas behind Outside In*. Geometry Center, 1995.
- [20] H. LIEBMANN. « Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung ». *Mathematische Annalen* **53**, n° 1-2 (1900), p. 81-112.
- [21] T. K. MILNOR. « Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature ». *Advances in Mathematics* **8**, n° 3 (1972), p. 474-543.
- [22] J. NASH. « C^1 isometric imbeddings ». *Annals of mathematics* (1954), p. 383-396.
- [23] L. SCHLÄFLI. « Nota alla Memoria del sig. Beltrami, «Sugli spazii di curvatura costante» ». *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)* **5**, n° 1 (1871), p. 178-193.
- [24] S. SMALE. « A classification of immersions of the two-sphere ». *Transactions of the American Mathematical Society* **90**, n° 2 (1959), p. 281-290.
- [25] C. VILLANI. « Le paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe ». *Séminaire Bourbaki, Astérisque* **332** (2010), p. 101-134.
- [26] H. WHITNEY. « Differentiable manifolds ». *Annals of Mathematics* (1936), p. 645-680.
- [27] H. WHITNEY. « The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$ -space ». *Annals of Mathematics* (1944), p. 220-246.



Vincent BORRELLI

Université Lyon 1
borrelli@math.univ-lyon1.fr

Vincent Borrelli est maître de conférence à l'université Claude Bernard-Lyon 1. Ses travaux portent sur les applications de l'intégration convexe.

Un grand merci à Roland Denis, Damien Gayet, Francis Lazarus et Boris Thibert pour leur relecture attentive et leurs remarques pertinentes.