Curriculum Vitae

Vincent BORRELLI.

Né le 20/09/68.
19 rue commandant Faurax, 69 006 Lyon.
Tél : 04.72.78.78.32.

Situation actuelle

Maître de conférences (depuis sept. 1997) à l'Université Claude Bernard-Lyon I.
Bât. Mathématiques (101),
43, bd du 11 novembre 1918, 69 622 Villeurbanne cedex.
Tél. : 04.72.44.79.38.
Mèl : borrelli@math.univ-lyon1.fr

Cursus universitaire

8 Octobre 2004. – Habilitation à diriger des recherches présentée devant l'Université Claude Bernard-Lyon I (UCBL).
TITRE : Plongements lagrangiens et totalement réels-Energie et volume des champs de vecteurs
JURY : Jean-Pierre Bourguignon (président), Jacques Lafontaine, Rémi Langevin, François Laudenbach, Jean-Marie Morvan, Pierre Pansu.
RAPPORTEURS : Yakov Eliashberg, Jacques Lafontaine, François Laudenbach.

Depuis Sept. 1997. – Maître de conférences à l'UCBL.

Sept. 1996 - Août 1997. – ATER à l'UCBL.

30 Mai 1996. – Diplôme de doctorat présenté devant l'Université Claude Bernard-Lyon I.
TITRE : Géométrie et topologie des sous-variétés lagrangiennes ou totalement réelles
JURY : Charles-Michel Marle (président), Nicole Désolneux, Thierry Fack, Jacques Lafontaine, Jean-Marie Morvan, Claude Viterbo.
RAPPORTEURS : Jacques Lafontaine, Claude Viterbo, Alan Weinstein.

Juillet 1991. – Diplôme de l'Ecole Centrale de Lyon.

Publications

[15] V. Borrelli, F. Orgeret, *Error term in pointwise approximation of the curvature of a curve*, Computer Aided Geom. Design. 27 (2010), 538-550

[14] V. Borrelli, H. Zoubir, *Stability of Unit Hopf Vector Fields on Quotients of Spheres*, Journal of Differential Geometry and its Applications 28 (2010), 488-499.

[13] V. Borrelli, O. Gil-Medrano, *Area-minimizing vector fields on round 2-spheres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 640 (2010), 85-100

[12] V. Borrelli, O. Gil-Medrano, *A critical radius for unit Hopf vector fields on spheres*, Math. Ann., 334 (2006), 731-752.

[11] V. Borrelli, *Stability of the characteristic vector field of a Sasakian manifold*, Soochow J. of Math., special issue in honor of Pr. Bang-Yen Chen, 30 (2004), 283-292.

[10] V. Borrelli, C. Gorodski, *Minimal Legendrian submanifolds of* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *and absolutely area-minimizing cones*, Diff. Geom. and its Appl. 21 (2004), 337-347.

[9] V. Borrelli, F. Cazals, J.-M. Morvan, *On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures*, Computer Aided Geometric Design.20 (2003), 319-341.

[8] V. Borrelli, F. Brito, O. Gil-Medrano, *On the infimum of the Energy of unit vector fields on odd-dimensional spheres*, Ann. Global Anal. Geom. 23 (2003), 129-140.

[7] V. Borrelli, *On totally real isotopy classes,* Int. Math. Res. Not. (2002) 2, 89-109

[6] V. Borrelli, F. Brito, O. Gil-Medrano, *An Energy Minimizing Family of Unit Vector Fields on Odd-dimensional Spheres*, Contemp. Math. 288 (2001), 273-276.

[5] V. Borrelli, *New examples of Lagrangian rigidity,* Israel J. of Math. 125 (2001), 221-235.

[4] V. Borrelli, *Linking classes of Lagrangian or totally real embeddings,* Ann. Global. Anal. Geom. 17 (1999), 371-384.

[3] V. Borrelli, *Maslov form and J-volume of totally real immersions,* J. of Geo. and Phy. 25 (1998), 271-290.

[2] V. Borrelli, *Classe de Maslov des sous-variétés totalement réelles,* C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 323 (1996), 1035-1038.

[1] V. Borrelli, B.-Y Chen et J.-M. Morvan, *Une caractérisation géométrique de la sphère de Whitney,* C. R. Acad. Sc. Paris, série I, 321 (1995), 1485-1490.

Publications dans des revues sans comité de lecture

[16] V. Borrelli, *The Gluck and Ziller Problem with the Euclidean Metric*, Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, 22 (2004), 83-92.

[17] V. Borrelli, *Characteristic classes*, p 257-286 du livre : Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry, M. Boucetta and J.-M. Morvan editors, 2005 IOS Press.

[18] V.Borrelli, *Courbure discrètre ponctuelle*, Actes du séminaire Théorie spectrale et géométrie, 25 (2006-2007), 25-39.

[19] V.Borrelli, O. Gil-Medrano, *Pontriagin fields minimize area on the 2-sphere*, Géométries et dynamiques, Collection Travaux en cours, Vol 70, 335-341, Hermann, 2008.

Travaux soumis

[20] V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, B. Thibert, *Flat tori in the three-dimensional space.*

Séjour à l'étranger (depuis 2007)

Avril 2009 : Université de Lehigh (Pennsylvanie), sur invitation du Pr. D. Johnson.

Février 2008 : Université de Valencia (Espagne), sur invitation du Pr. O. Gil-Medrano.

Séminaires et conférences (depuis 2007)

- Mini cours *Intégration convexe* (trois exposés) les 29, 30 et 31 mars 2011, U. de Nantes.

- Séminaire de Géométrie - Topologie - Dynamique, 8 décembre 2011, U. Paris 11 :
- Todai Forum, 16-18 septembre 2011, ENS-Lyon :
- Séminaire de Géométrie différentielle, 7 juin 2011, U. de Nancy :
- Séminaire de Géométrie, 1 avril 2011, U. de Nantes :
- Séminaire de Géométrie, 7 juin 2010, U. P. M. C. (Paris 7) :
- Colloquium J. A. Dieudonné, 19 mai 2010, U. de Nice :
- Séminaire Gaston Darboux, 12 février 2010, U. de Montpellier :
- Séminaire de géométrie, 13 novembre 2009, U. de Tours :
- Séminaire d'analyse, géométrie et dynamiques complexes, 12 novembre 2009, U. de Toulouse :
- Séminaire math-info, 1 novembre 2009, U. de La Réunion :
- Colloquium AGL, 19 octobre 2009, U. de Lyon :
Intégration convexe, plongement isométrique et visualisation.

-Weekly Colloquium Series, 21 avril 2009, Lehigh University (Pennsylvanie) :
Volume of Vector Fields.

- Séminaire de Mathématiques pures, 20 mars 2007, U. de Clermont-Ferrand : *Du nouveau sur la sphère* $\mathbb{S}^2$.

- Séminaire commun Géométrie-Math. appliquées, 8 mars 2007, U. de Grenoble :
- Journées Nancéiennes de Géométrie 16 Janvier 2007, U. de Nancy :
Courbures discrètes ponctuelles.

Enseignement-Administration Recherche

Activités d'enseignement

Je donne actuellement le cours de géométrie du Master 1, celui du CAPES, et un cours sur les *Courbes et Surfaces* en L2. J'enseigne également un cycle de mathématique à l'Université Ouverte.

Animations scientifiques et administration

Je **co-encadre** depuis septembre 2008 avec Francis Lazarus (Laboratoire GIPSA-Lab, Grenoble), Saïd Jabrane dont la thèse porte sur les applications de l'intégration convexe et la visualisation (projet Hévéa, *cf. infra*).

J'ai **encadré** en cotutelle avec Mohammed Bekkar (U. d'Oran), Hanifi Zoubir qui a soutenu sa thèse *Energie et volume des champs de vecteurs sur les quotients des sphères* le 18 septembre 2009.

J'ai **co-encadré** avec Jean-Marie Morvan (ICJ, U. de Lyon), Fabrice Orgeret, qui a soutenu sa thèse *Sur l'approximation discrete des courbures des courbes planes et des surfaces lisses de l'espace euclidien de dimension 3* le 9 juillet 2007.

J'ai invité pour des **collaborations scientifiques** les professeurs :
- D. Johnson de l'université de Lehigh, Pennsylvanie (Mai 2008)
- O. Gil-Medrano de l'université de Valencia, Espagne (Mai-Juin 2002, Février 2003, Novembre 2004, Mai 2006).
- J. D. Moore de l'université de Santa Barbara, Californie (Décembre 2004).
- D. Spring de l'université de York, Canada (Mai 2001).
- C. Gorodski alors à l'université de Köln, Allemagne (Mars 2000).
- F. Brito de l'université de Saõ Paolo, Brésil (Février 2000).

Je suis actuellement responsable de la diffusion de la culture mathématique du laboratoire et membre extérieur des comités de sélection de l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand) et de l'Université Paul Verlaine (Metz). Précédemment, j'ai été :

- Membre du conseil de laboratoire de l'ICJ (janv 2007 à déc. 2010)
- Membre de la commission de spécialistes de Lyon I, 25 ième section (sept. 1998 à sept. 2004) et également membre de la commission 25/26 (sept. 2002 à sept. 2004).
- Membre du conseil de l'Institut Girard Désargues (sept. 1998 à déc. 2004).
- Membre du conseil de l'U. F. R de Mathématiques, (janv. 2000 à déc. 2004).

Recherche

Mes recherches s'articulent autour de trois thèmes qui ont pour point commun la **géométrie des sous-variétés** : les applications du h-principe (projet *Hévéa*), le volume des champs de vecteurs et la courbure discrète.

1. Le projet HEVEA. – Le projet *Hévéa* a pour but de visualiser certaines surfaces célèbres dont il n'existe aucune image : il s'agit des *tores plats*, des *sphères de Nash-Kuiper* et des plongements complets de *l'espace hyperbolique* dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$. La célébrité de ces surfaces tient à leurs propriétés métriques : par exemple une sphère de Nash-Kuiper est une surface C^1 plongée dans une boule de rayon $r < 1$ de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ et qui est isométrique à la sphère ronde de rayon 1. Toutes ces surfaces furent découvertes au milieu des années 50 grâce aux travaux de F. Nash et de H. Kuiper mais cependant leur démarche n'était pas suffisamment constructive pour rendre possible une visualisation. Vingt-cinq ans plus tard, M. Gromov invente le *h-principe* et met au point une technique, dite de *l'intégration convexe*, qui lui permet non seulement de retrouver les résultats de Nash et de Kuiper, mais aussi d'unifier et de simplifier de nombreux autres théorèmes de classifications obtenus auparavant par Smale, Hirsch et Phillips. En fait, la méthode développée par Gromov est très générale. Elle permet de résoudre des relations différentielles et par conséquent de vastes familles de problèmes différents, son champ d'application dépasse donc largement les surfaces paradoxales de Nash et a conduit à toute une famille de résultats nouveaux. Cette méthode a aussi un autre avantage sur la démarche de Nash : elle donne en effet une sorte de "plan de fabrication" des solutions qu'elle produit. La visualisation devient envisageable.

Le développement de l'informatique à la fin du siècle dernier a rendu possible la visualisation d'objets mathématiques complexes imaginable uniquement par les spécialistes, voire totalement inaccessible comme dans le cadre de ce projet. L'animation de l'inversion de la sphère[1] à partir des travaux du mathématicien et médaille Fields William Thurston en est un magnifique exemple. Mais la programmation de ces objets demande une compréhension profonde des mathématiques sous-jacentes qui mène parfois à de véritables découvertes. C'est le cas des résultats de David Hoffman concernant les surfaces minimales et plus généralement des travaux relevant de ce que l'on désigne par *mathématiques expérimentales*. Le projet s'inscrit dans cette double optique : *donner à voir pour mieux comprendre*. L'équipe du projet Hévéa réunit quatre personnes issues de trois laboratoires respectivement spécialisés en mathématiques (Institut Camille Jordan à Lyon), informatique (Laboratoire GIPSA-Lab à Grenoble) et mathématiques appliquées (Laboratoire Jean Kuntzmann à Grenoble).

Il y a, derrière ce projet, un but à long terme : au delà de la visualisation de paradoxes mathématiques, l'intégration convexe est un outil puissant pour créer et

[1]découverte par S. Smale

modéliser des formes sous contraintes (différentielles). Plus spécifiquement, le h-principe est particulièrement adapté à des systèmes de contraintes sous-déterminés. Il y a donc dans ces cas une alternative possible aux surfaces et maillages splines ou aux techniques d'éléments finis pour le domaine de la modélisation géométrique et des mathématiques appliquées.

Le projet Hévéa a obtenu un financement PEPS du CNRS, il est également soutenu par la Région Rhône-Alpes au travers d'un financement CIBLE.

2. Energie et volume des champs de vecteurs

Soit V un champ de vecteur unitaire sur une variété riemannienne (M^n, g), *l'énergie* de V est l'énergie de l'application V entre les variétés riemanniennes (M^n, g) et (T^1M^n, g_S) où g_S est la métrique de Sasaki de T^1M^n, elle s'écrit :

$$E(V) = \frac{1}{2}\int_{M^n} (n + \|\nabla V\|^2)\, dvol_M$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita. Dans le cas où M^n est la sphère $\mathbb{S}^3$ avec sa métrique standard, on montre que l'infimum de l'énergie parmi les champs de vecteurs unitaires est atteint par les champs de Hopf, c'est-à-dire tout champ de vecteurs unitaires tangents aux fibres d'une fibration de Hopf $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}P^1$. Ce résultat n'admet pas de généralisation évidente au cas des sphères $\mathbb{S}^{2k+1}$, $(k > 1)$ le champ de Hopf étant instable pour l'énergie dans ces dimensions. Dans un travail conjoint avec F. Brito et O. Gil-Medrano ([6],[8]), on établit que pour la sphère $\mathbb{S}^{2k+1}$, $k > 1$, l'infimum vaut $\frac{1}{2}(2k + 1 + \frac{2k}{2k-1})Vol(\mathbb{S}^{2k+1})$ et qu'il n'est atteint par aucun champ de vecteurs globalement défini sur la sphère.

On peut voir un champ de vecteurs unitaires V sur une variété riemannienne M^n comme une sous-variété $V(M^n)$ de son espace tangent unitaire et calculer son volume $Vol(V) = Vol(V(M^n))$ pour la métrique de Sasaki dans T^1M^n. Il est alors naturel de considérer la fonctionnelle

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}: & \Gamma(T^1M^n) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & V & \longmapsto & Vol(V). \end{array}$$

En 1986, H. Gluck et W. Ziller montrent que si $M^n = \mathbb{S}^3$ avec sa métrique standard, l'infimum de $\mathcal{V}$ est atteint par le champ de Hopf. Mais, de même que pour l'énergie, ce résultat ne se généralise pas aux sphères $\mathbb{S}^{2k+1}$, $k > 1$. En particulier le champ de Hopf de $\mathbb{S}^{2k+1}$, $k > 1$ n'est pas le minimum du volume. Mon objectif est de résoudre la question posée par H. Gluck et W. Ziller, à savoir, trouver l'infimum de $\mathcal{V}$ pour les sphères $\mathbb{S}^{2k+1}$, $k > 1$. En fait, en 1993, S. Pedersen a conjecturé que cet infimum est atteint par un champ ayant une unique singularité et que l'on appelle depuis le *champ de Pedersen*. Dans [13], on démontre que la conjecture de Pedersen est vraie pour $\mathbb{S}^2$ (historiquement la conjecture est énoncée pour les sphères de dimension impaire mais on peut formuler un problème de Gluck et Ziller ainsi qu'une conjecture de Pedersen pour la dimension paire). Les résultats obtenus dans [11],[12] montrent que - contrairement à l'énergie - la fonctionnelle $\mathcal{V}$ est sensible au rayon de la sphère. Une conséquence de cette dépendance est que le champ de Pedersen ne peut réaliser l'infimum du volume pour les petits et les grands rayons sur $\mathbb{S}^{2k+1}$, $k > 1$. Depuis, O. Gil-Medrano et moi-même avons élargi cette conclusion pour tous les rayons sauf le rayon 1, autrement dit la conjecture de Pedersen ne peut être exacte que pour une sphère unité[2]. Mais notre conviction est qu'elle demeure inexacte même dans ce cas, c'est l'objet de nos recherches actuelles.

3. Courbures discrètes

La question de la *courbure discrète* est celle de la généralisation de la notion de courbure à des objets qui ne sont pas de classe C^2 comme, par exemple, des sous-variétés riemannienne linéaires par morceaux ou encore des nuages de points. Bien que le problème soit relativement ancien –les travaux de Steiner sur l'analogue polyédral de la courbure moyenne remontent à 1840– il n'est encore que très partiellement résolu. La situation actuelle est la suivante : on comprend raisonnablement bien comment discrétiser les mesures de courbure, autrement dit les intégrales des courbures sur des ouverts d'une sous-variété donnée, en revanche l'approximation ponctuelle de la courbure reste problématique[3]. Voici pourquoi. Dans le cadre C^2, disons pour une surface S de $\mathbb{R}^3$, la formule de Legendre permet à partir d'un triangle géodésique de S, d'obtenir une estimation de la courbure de Gauss. Il se trouve que cette formule n'a pas d'analogue simple dans le cadre linéaire par morceaux, c'est-à-dire lorsque l'on remplace le triangle géodésique par le triangle des cordes sous-jacent. Concrètement, la définition “classique” de la courbure de Gauss discrète induit des effets inattendus : une suite de plus en plus fine de maillages dont les sommets sont dans S, engendre des suites de courbures discrètes ponctuelles qui certes convergent en général, mais pas vers les bonnes valeurs ! *A contrario* la mesure discrète de la courbure de Gauss converge vers la bonne mesure sur la surface...

J'ai montré dans mon travail de DEA, qu'un certain type de maillages, les 6-maillages paramétrés, possède une propriété remarquable : la courbure de Gauss discrète y converge toujours vers la valeur exacte de la courbure de Gauss de la surface. Autrement dit, à condition de faire une moyenne sur six triangles entourant un même sommet, une formule de Legendre réapparaît. Récemment ce résultat a été étendu par G. Xu aux 6-maillages satisfaisant à la propriété du parallélogramme (Comp. Aided. Geo. Design, 2006).

Que ce passe-t-il dans le cas des n-maillages avec $n \neq 6$? On montre dans [9] qu'il existe un analogue de la formule de Legendre, mais elle met en relation, outre

[2] Ce dernier résultat n'est pas encore publié car nous voudrions traiter dans un même article le cas de tous les rayons.

[3] Cf. le Séminaire Bourbaki (juin 1986) de Jacques Lafontaine pour les mesures de courbure, et le preprint *Discrete curvatures and applications : a survey* de Marc Daniel et Jean-Louis Maltret pour les courbures ponctuelles

la courbure de Gauss, la somme des carrés des courbures principales. Ceci a une conséquence intéressante, il suffit de deux maillages, un 6-maillage et n-maillage $n \neq 6$ pour obtenir une estimation ponctuelle des courbures principales de la surface. Une fois l'obtention des courbures principales, une question reste néanmoins posée : quelle est la qualité de l'approximation discrète ? Ou encore, peut-on estimer l'erreur entre la courbure discrète en un sommet d'un maillage et la courbure de la surface en ce même point ? Cette question est traitée dans [19] pour le cas des courbes et dans [20] pour celui des surfaces. Dans ces articles l'erreur est majorée par une quantité dépendant des données du maillage et de données globales de la sous-variété. En particulier il n'est pas besoin de connaître précisément la surface passant par le maillage pour estimer l'erreur. Une annonce des résultats, sans les démonstrations, se trouve dans [17].

Ces travaux concernent un domaine qui connaît des applications directes en visualisation, en géologie et en médecine.