Marches aléatoires en environnement aléatoire faiblement elliptique

Élodie Bouchet

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1
Thèse dirigée par Christophe Sabot

30 juin 2014

Définition d'une marche aléatoire en milieu aléatoire

Soit $\omega \in \Omega$ un environnement sur le graphe dirigé $\mathbb{Z}^d$, avec :

$$\Omega = \left\{ \omega = (\omega(x,y))_{x\sim y} \in]0,1]^E \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{Z}^d, \sum_{i=1}^{2d} \omega(x, x+e_i) = 1 \right\}.$$

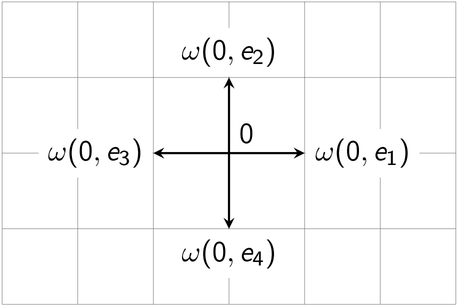


Figure: Environnement autour de 0 en dimension 2

Loi quenched, loi annealed

- À $\omega \in \Omega$ fixé, on définit la marche aléatoire X_n sur $\mathbb{Z}^d$ par :
  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^d$, $\forall i \in [\![1, 2d]\!]$,

  $$P_x^\omega(X_{n+1} = y + e_i | X_n = y) = \omega(y, y + e_i).$$

  P_x^ω est appelée la loi **quenched** de la marche aléatoire.

- On construit l'environnement ω en choisissant les probabilités de sortie de chaque sommet de manière i.i.d.. On note $\mathbb{P}$ la loi ainsi obtenue sur Ω, et $\mathbb{E}$ l'espérance associée. On peut alors définir

  $$\mathbb{P}_x[.] = \mathbb{E}[P_x^\omega(.)],$$

  qui est appelée la loi **annealed** du processus partant de x.

Ellipticité, ellipticité uniforme

L'environnement est **elliptique** sous la loi $\mathbb{P}$ si $\forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\forall i \in [\![1, 2d]\!]$,

$$\mathbb{P}(\omega(x, x + e_i) > 0) = 1.$$

Il est **uniformément elliptique** sous la loi $\mathbb{P}$ si $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{Z}^d$, $\forall i \in [\![1, 2d]\!]$,

$$\mathbb{P}(\omega(x, x + e_i) \geqslant c) = 1.$$

On va ici s'intéresser aux environnements faiblement elliptiques (elliptiques, non uniformément elliptiques). Dans ce cas, des pièges peuvent se former.

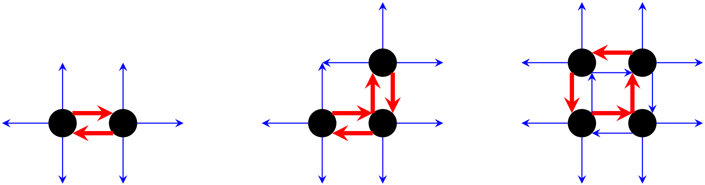


Figure: Exemples de pièges

Contexte général de la thèse

On s'intéresse aux effets de la non-uniforme ellipticité.

La thèse se compose de trois articles, qui étudient les questions suivantes dans le cas des environnements faiblement elliptiques :

1. Existence d'une mesure invariante pour l'environnement vu de la particule dans le cas particulier des environnements de Dirichlet.
2. Intégrabilité des temps de renouvellement dans le cas transient.
3. Conditions pour la validité d'un théorème central limite fonctionnel quenched dans le cas balistique.

Les environnements de Dirichlet

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2d}) \in \mathbb{R}_+^*$. On construit $\omega \in \Omega$ comme suit : on choisit pour chaque sommet $x \in \mathbb{Z}^d$ les probabilités de sortie $(\omega(x, x+e_i))_{i=1\ldots 2d}$ indépendamment suivant des **lois de Dirichlet** de densité

$$\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{2d} \Gamma(\alpha_i)} \left(\prod_{i=1}^{2d} x_i^{\alpha_i - 1}\right) dx_1 \ldots dx_{2d-1}$$

sur le simplexe

$$\left\{(x_1, \ldots, x_{2d}) \in]0,1]^{2d}, \sum_{i=1}^{2d} x_i = 1\right\}.$$

On note $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ la loi de l'environnement.

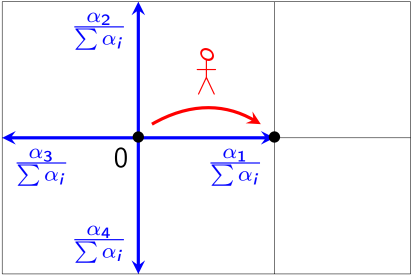
Lien avec les marches renforcées

La loi annealed d'une MAMA en environnement de Dirichlet est aussi la loi d'une **marche aléatoire renforcée linéairement par arêtes orientées** :

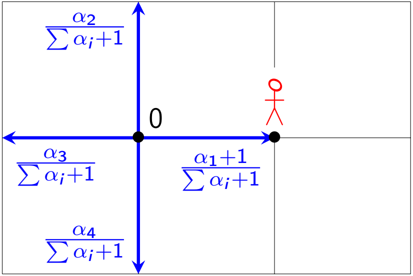
$$\mathbb{P}_x^{(\alpha)}(X_{n+1} = X_n + e_i | \sigma(X_k, k \leqslant n)) = \frac{\alpha_i + N_i(X_n, n)}{\sum_{k=1}^{2d}(\alpha_k + N_k(X_n, n))},$$

où $N_k(x, n)$ est le nombre de passages sur l'arête orientée $(x, x + e_k)$ avant l'instant n.

État initial



Après un pas



Force des pièges pour les environnements de Dirichlet

Les environnements de Dirichlet ne sont pas uniformément elliptiques. Soit

$$\kappa := 2\left(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i\right) - \max_{i=1,\dots,d}(\alpha_i + \alpha_{i+d}),$$

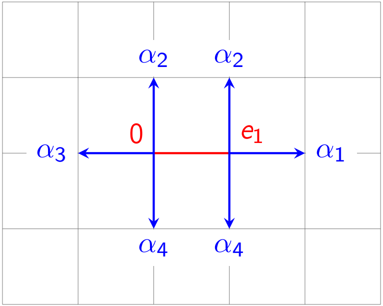


Figure: Poids des arêtes sortant de $\{0, e_1\}$, en dimension 2

- Les pièges du type $\{0, e_i\}$ sont les pièges finis les plus forts.
- κ minimise le poids des arêtes sortant d'un ensemble $\{0, e_i\}$.

Quelques résultats pour les environnements de Dirichlet

On dit que la marche aléatoire en milieu aléatoire est :

transiente dans la direction ℓ si

$$\mathbb{P}_0\Big(\lim_{n\to\infty} X_n \cdot \ell = +\infty\Big) = 1,$$

balistique dans la direction ℓ si

$$\mathbb{P}_0\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n \cdot \ell}{n} > 0\Big) = 1.$$

- Enriquez-Sabot et Tournier ont montré que pour tout $d \geqslant 2$, la marche est balistique quand $\sum_{i=1}^{d} |\alpha_i - \alpha_{i+d}| > 1$.

- Pour $d \geqslant 3$, $\kappa > 1$, Sabot a montré qu'il existe une mesure invariante absolument continue pour l'environnement vu de la particule (qui n'existe pas pour $\kappa \leqslant 1$). Cela permet de caractériser complètement le régime balistique. Dans le cas balistique, cela permet de caractériser les transiences directionnelles.

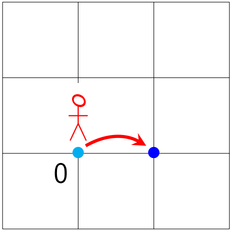
Pour les environnements de Dirichlet, on montre l'existence d'une mesure invariante pour l'environnement vu de la particule dans le cas d'une marche accélérée. On obtient :

- Pour $d \geqslant 3$, et pour tout κ, une caractérisation des transiences et récurrences directionnelles,
- En toute dimension, la loi du $0-1$ de Kalikow,
- Pour $d \geqslant 3$, $\kappa \leqslant 1$ et dans le cas où il y a transience directionnelle, l'ordre polynomial de l'éloignement de la marche à l'origine.

Processus vu de la particule

Soit τ_x le shift sur l'environnement : $\tau_x\omega(y,z) = \omega(x+y, x+z)$.
Le **processus vu de la particule** est $\overline{\omega}_n = \tau_{X_n}\omega$.

Exemple :



Sous $P_0^{\omega_0}$, $\omega_0 \in \Omega$, c'est un processus de Markov sur Ω, de générateur R :

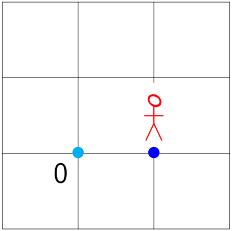
$$Rf(\omega) = \sum_{i=0}^{2d} \omega(0, e_i) f(\tau_{e_i}\omega).$$

L'existence d'une **mesure invariante absolument continue par rapport à** $\mathbb{P}$ pour ce processus est une propriété cruciale. Problème : cette existence est rarement connue dans le cas non-réversible.

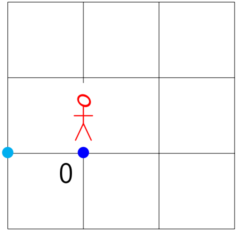
Processus vu de la particule

Soit τ_x le shift sur l'environnement : $\tau_x\omega(y,z) = \omega(x+y, x+z)$.
Le **processus vu de la particule** est $\overline{\omega}_n = \tau_{X_n}\omega$.

Processus Classique



Processus vu de la particule



Sous $P_0^{\omega_0}$, $\omega_0 \in \Omega$, c'est un processus de Markov sur Ω, de générateur R :

$$Rf(\omega) = \sum_{i=0}^{2d} \omega(0, e_i) f(\tau_{e_i}\omega).$$

L'existence d'une **mesure invariante absolument continue par rapport à** $\mathbb{P}$ pour ce processus est une propriété cruciale. Problème : cette existence est rarement connue dans le cas non-réversible.

Construction d'une marche accélérée

Pour « tuer » les pièges finis, on construit une marche accélérée. Soit Λ un ensemble d'arêtes contenant 0, $\omega_\sigma = \prod_{e\in\sigma}\omega_e$. On pose :

$$\gamma^\omega(x) = \frac{1}{\sum \omega_\sigma},$$

où on somme sur tous les chemins simples finis $\sigma : x \to (x+\Lambda)^c$.

On définit Y_t le processus de Markov en temps continu de taux de saut :

$$P^\omega(Y_{t+dt} = y | Y_t = x) = \gamma^\omega(x)\omega(x,y)dt.$$

Son générateur est :

$$R^\Lambda f(\omega) = \sum_{i=0}^{2d} \gamma^\omega(0)\omega(0,e_i)f(\tau_{e_i}\omega).$$

Mesure invariante vue de la particule

Soit $\kappa^\Lambda = \min_K \left\{ \sum_{e \in \partial_+(K)} \alpha_e \ , \ K \text{ connexe }, 0 \in K \text{ et } \partial\Lambda \cap K \neq \emptyset \right\}$, où

$\partial_+(K) = \{e \in E, \ \underline{e} \in K, \ \overline{e} \notin K\}$, $\partial\Lambda = \{x \in \Lambda | \exists y \sim x \text{ t.q. } y \notin \Lambda\}$.

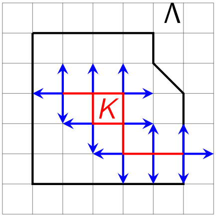


Figure : $\sum_{e \in \partial_+(K)} \alpha_e$ pour un K arbitraire.

Théorème 1 (B., 2013)

Soit $d \geqslant 3$ et $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ la loi associée aux poids $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2d})$. Si $\kappa^\Lambda > 1$, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$ sur Ω qui est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ et invariante pour le générateur R^Λ. De plus, $\frac{d\mathbb{Q}^{(\alpha)}}{d\mathbb{P}^{(\alpha)}}$ est dans $L_p(\mathbb{P}^{(\alpha)})$ pour tout $1 \leqslant p < \kappa^\Lambda$.

Remarque : on peut toujours trouver Λ tel que $\kappa^\Lambda > 1$.

Récurrence et transience

Soit $d_\alpha = \mathbb{E}_0^{(\alpha)}(X_1) = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i} \sum_{i=1}^{2d} \alpha_i e_i$ le drift moyen après le premier pas.

Théorème 2 (B., 2013)

Soit $d \geqslant 3$,

i) Si $\kappa^\Lambda > 1$ et $d_\alpha = 0$, alors $\lim \dfrac{Y_t}{t} = 0$, $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$p.s., et
$\forall i = 1 \ldots d$, $\liminf Y_t \cdot e_i = -\infty$, $\limsup Y_t \cdot e_i = +\infty$, $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$p.s..

ii) Si $\kappa^\Lambda > 1$ et $d_\alpha \neq 0$, alors $\exists v \neq 0$ tel que $\lim \dfrac{Y_t}{t} = v$, $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$p.s., et
$\forall i = 1 \ldots d$,
- Si $d_\alpha \cdot e_i \neq 0$, $(d_\alpha \cdot e_i)(v \cdot e_i) > 0$,
- Si $d_\alpha \cdot e_i = 0$,
  $\liminf Y_t \cdot e_i = -\infty$, $\limsup Y_t \cdot e_i = +\infty$, $\mathbb{P}_0^{(\alpha)}$ p.s. .

Remarque : dans ce cas, on a équivalence entre transience directionnelle et balisticité.

Corollaire : Critère de transience directionnelle pour X_n

Soit X_n une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$, dans un environnement de Dirichlet de paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$. On note $d_\alpha = \mathbb{E}_0^{(\alpha)}(X_1)$ le drift moyen après le premier pas.
Pour tout $i \in [\![1, 2d]\!]$, on a :

- Si $d_\alpha \cdot e_i = 0$, alors la marche est récurrente dans la direction i.
- Si $d_\alpha \cdot e_i \neq 0$, alors la marche est transiente dans la direction i.

Corollaire : Loi du $0-1$ de Kalikow dans le cas Dirichlet

Soit $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ la loi d'un environnement de Dirichlet sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$, et X_n la MAMA associée. Alors, $\forall \ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on est dans un des cas suivants :

- $\liminf\limits_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = -\infty, \ \limsup\limits_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = +\infty, \ \mathbb{P}_0^{(\alpha)} p.s.$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = -\infty, \ \mathbb{P}_0^{(\alpha)} p.s.$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n \cdot \ell = +\infty, \ \mathbb{P}_0^{(\alpha)} p.s.$.

Ordre polynomial de l'éloignement de la marche

Théorème 3 (B., 2013)

Soit $d \geqslant 3$, $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ la loi de l'environnement de Dirichlet de paramètres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2d})$ sur $\mathbb{Z}^d$, et X_n la MAMA associée. On suppose que $\kappa \leqslant 1$. Soit $\ell \in \{e_1, \ldots, e_{2d}\}$ tel que $d_\alpha \cdot \ell > 0$. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log(X_n \cdot \ell)}{\log(n)} = \kappa \text{ en } \mathbb{P}_0^{(\alpha)}\text{-probabilité.}$$

Idée de la preuve des théorèmes 1, 2 et 3

- On utilise une propriété clé d'« invariance par retournement du temps » pour les environnements de Dirichlet.

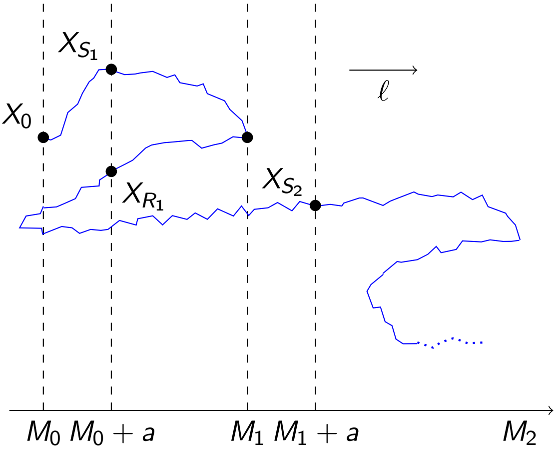
- On utilise un théorème sur les flots de type max-flow min-cut. L'accélération de la marche joue alors le même rôle que si on avait augmenté les valeurs des poids α_i.

- Pour revenir à la marche à temps discret, il suffit d'intégrer le changement de temps.

Pour le cas d'environnements i.i.d. possédant une direction ℓ de transience, on étudie les conditions sur $\mathbb{P}$ nécessaires pour assurer l'existence de moments pour les temps de renouvellement.

Temps de renouvellement

Soit ℓ une direction où la marche est transiente. On cherche des τ_i tels que $X_t \cdot \ell \leqslant X_{\tau_i} \cdot \ell$ pour tout $t < \tau_i$ et $X_{\tau_i + t} \cdot \ell \geqslant X_{\tau_i} \cdot \ell$ pour tout $t \geqslant 0$.



On définit $Q_0(\cdot) := P_0(\cdot | \tau_1 < \infty)$.

Théorème (Sznitman et Zerner, 1999)

Sous Q_0, (X_{τ_1}, τ_1), $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1)$, ..., $(X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k)$, sont des variables aléatoires i.i.d..

LGN, TCL annealed

Théorème (Sznitman et Zerner 1999, Sznitman 2000, Zerner 2002)

On considère une MAMA en environnement elliptique i.i.d.. On suppose que pour tout $\ell' \in V$ voisinage de ℓ, la marche aléatoire est transiente dans la direction ℓ'. Alors il existe un v déterministe tel que $\mathbb{P}_0$-p.s.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{n} = v.$$

De plus, on a :

a) Si $\mathbb{E}_0(\tau_1) < \infty$, la marche est balistique et $v \neq 0$.

b) Si $\mathbb{E}_0(\tau_1^2) < \infty$,

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

converge en loi sous $\mathbb{P}_0$ vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.

Condition $(T)_\gamma$

Soit $\gamma \in]0,1]$ et $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Une MAMA en environnement i.i.d. vérifie la condition $(T)_\gamma$ (introduite par Sznitman) dans la direction ℓ si elle vérifie une des deux conditions équivalentes suivantes :

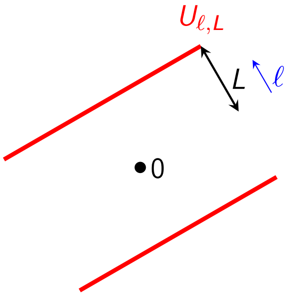
- La marche est transiente dans la direction ℓ, et il existe $c > 0$ tel que

$$\mathbb{E}_0\left(\exp\left(c \sup_{0 \leqslant n \leqslant \tau_1} \|X_n\|_2^\gamma\right)\right) < \infty.$$

- Il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de ℓ tel que pour tout $\ell' \in V$,

$$\limsup_{L \to \infty} \frac{1}{L^\gamma} \log \mathbb{P}_0\left(X_{T_{U_{\ell,L}}} \cdot \ell' < 0\right) < 0,$$

où $U_{\ell,L} := \{x \in \mathbb{Z}^d : -L \leqslant x \cdot \ell \leqslant L\}$.



Condition d'ellipticité $(E')_\beta$

- Soit $\beta > 0$. On dit que l'environnement satisfait la condition $(E')_\beta$ s'il existe $\{\beta_i, i \in [\![1, 2d]\!]\} \in]0, \infty[^{2d}$ tel que

$$\kappa\left(\{\beta_i, i \in [\![1, 2d]\!]\}\right) := 2\sum_{i=1}^{2d} \beta_i - \max_{i \in [\![1,d]\!]} (\beta_i + \beta_{i+d}) > \beta$$

  et satisfaisant

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{2d} \omega(0, e_i)^{-\beta_i}\right) < \infty.$$

- Dans le cas Dirichlet de paramètres $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2d})$, $(E')_\beta$ est équivalente à $\kappa := 2\left(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i\right) - \max_{i \in [\![1,d]\!]}(\alpha_i + \alpha_{i+d}) > \beta$.

Moments des τ_i

Théorème 4 (B., Ramírez, Sabot, 2013)

Soit $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\gamma \in]0,1]$ et $\beta > 0$. On suppose que la condition $(T)_\gamma$ est satisfaite dans la direction ℓ, et qu'on a $(E')_\beta$. Alors il existe une direction asymptotique $\hat{v}$ et

$$\limsup_{u\to\infty} \left(\frac{\log \mathbb{P}_0(\tau_1^{\hat{v}} > u)}{\log u} \right) \leqslant -\beta.$$

Cela nous donne en particulier $\mathbb{E}(\tau_i^\beta) < +\infty$.

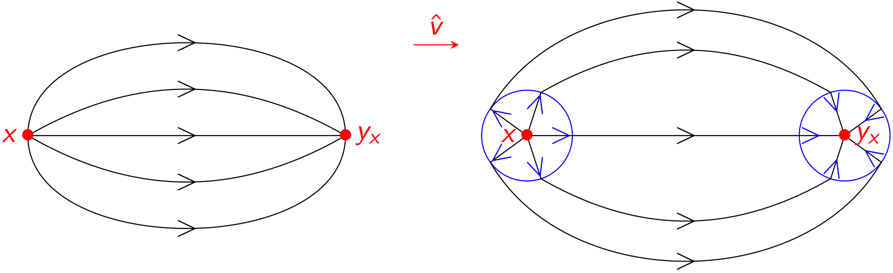
La condition $(E')_\beta$ est une amélioration de la condition obtenue par Campos et Ramírez, elle est optimale pour les environnements de Dirichlet.

Remarque : Fribergh et Kious viennent d'obtenir une condition d'ellipticité qui contient $(E')_\beta$, mais leur condition est compliquée à énoncer.

Idée de la preuve du théorème 4

On se base sur la preuve de Campos et Ramírez, qui construisent des chemins disjoints σ tels que $\mathbb{P}(\forall\sigma, \omega_\sigma \leqslant u^{-m})$ décroit en $u^{-\beta}$. Ces chemins partent de x et arrivent en y_x, distant d'environ $(\ln u)^{\frac{1}{\beta}}$. On les remplace dans notre preuve par des moyennes de chemins.

Chemins : Moyennes de chemins :



Les bornes sur les probabilités sont alors obtenues avec Jensen. Un théorème de type max-flow min-cut permet de conclure.

Pour le cas d'environnements i.i.d. possédant une direction ℓ de balisticité, on étudie les conditions d'application du TCL quenched. Sous la condition supplémentaire $(T)_\gamma$, on affaiblit les hypothèses sur l'intégrabilité des temps de renouvellement de travaux déjà existants, pour arriver à la condition « presque optimale » $\mathbb{E}_0(\tau_1^2 \ln(\tau_1)^m) < +\infty$.

TCL quenched

Soit $d \geqslant 2$, on considère une MAMA X_n en environnement elliptique i.i.d.. On suppose que la marche est transiente dans la direction ℓ. On note toujours :

$$B^n(t) = \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

Théorème (Rassoul-Agha, Seppäläinen, 2009)

Si $\mathbb{E}_0(\tau_1^p) < \infty$ pour un $p > 176d$, alors on a $\mathbb{P}$-p.s. que $B^n(t)$ converge en loi sous $\mathbb{P}_{0,\omega}$ vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.

Théorème (Berger, Zeitouni, 2008)

Si l'environnement est uniformément elliptique et $\mathbb{E}_0(\tau_1^p) < \infty$ (pour $p \geqslant 2$ si $d \geqslant 4$, $p \geqslant 40$ si $d = 2$ ou 3), alors on a $\mathbb{P}$-p.s. que $B^n(t)$ converge en loi sous $\mathbb{P}_{0,\omega}$ vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.

TCL quenched sous $(T)_\gamma$

Théorème 5 (B., Sabot, dos Santos, 2014)

Soit $d \geqslant 2$ et $\gamma \in]0,1]$. On considère une MAMA X_n en environnement i.i.d.. On suppose que la marche est transiente dans la direction ℓ, que la condition $(T)_\gamma$ est satisfaite et qu'il existe $m > 1 + \frac{1}{\gamma}$ tel que

$$\mathbb{E}_0(\tau_1^2 \ln(\tau_1)^m) < \infty.$$

On a alors $\mathbb{P}$-p.s. que

$$B^n(t) := \frac{X_{[nt]} - [nt]v}{\sqrt{n}}$$

converge en loi sous P_0^ω vers un mouvement brownien de matrice de covariance non dégénérée.

Remarque : ce résultat est énoncé ici dans le cas des marches à plus proche voisin, mais est toujours valide pour les marches à portée finie.

Idée de la preuve du théorème 5

On utilise une méthode de Bolthausen et Sznitman. Soit $T > 0$, $b \in]1, 2]$ et $F : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et lipschitzienne. Soit $W_\cdot^{(n)}$ l'interpolation polygonale de $\frac{k}{n} \to B^n(\frac{k}{n})$. Pour passer du TCL annealed au TCL quenched, il suffit de montrer $\sum_{N=0}^{+\infty} \mathrm{Var}_{\mathbb{P}} \left(E_{0,\omega}(F(W_\cdot^{(b^N)})) \right) < +\infty$, où

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{P}} \left(E_{0,\omega}(F(W_\cdot^{(n)})) \right) := \left\| \mathbb{E}_0 \left[F(W^{(n)}) \middle| \omega \right] - \mathbb{E}_0 \left[F(W^{(n)}) \right] \right\|_2^2 .$$

Dans la suite, on notera $Q_n = \mathbb{E}_{0,0} \left[|X_{[0,n]} \cap \tilde{X}_{[0,n]}| \right]$ le nombre d'intersections de deux marches indépendantes X et $\tilde{X}$ dans le même environnement ω avant l'instant n.

Borne sur la variance

On suppose $(T)_\gamma$. Soit $m > 1 + \frac{1}{\gamma}$ tel que $\mathbb{E}_0\left[\tau_1^2(\ln(\tau_1))^m\right] < +\infty$ et $0 < \gamma' < \gamma$ tel que $m > 1 + \frac{1}{\gamma'}$. Alors $\forall \delta \in (0,1)$, $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\mathbb{E}_0\left[F(W^{(n)})\middle|\omega\right] - \mathbb{E}_0\left[F(W^{(n)})\right]\right\|_2^2 \leqslant C\left(\ln(n)^{-(m-\frac{1}{\gamma'})} + n^{-(1-\delta)}\mathbb{E}_0\left[Q_n\right]\right)$$

Borne sur les intersections

On suppose $(T)_\gamma$. Pour tout $0 < \eta < \frac{1}{2}$, il existe $0 < C_\eta < \infty$ dépendant seulement de η tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}_0\left[Q_n\right] \leqslant C_\eta n^{1-\eta}.$$

Pour le montrer,

- On améliore l'estimée clé de Berger et Zeitouni en plusieurs points, notamment grâce à $(T)_\gamma$.
- On modifie les temps de renouvellement joints construits par Rassoul-Agha et Seppäläinen, ce qui permet d'utiliser $(T)_\gamma$ pour obtenir de meilleures estimées sur le nombre d'intersections.

Merci de votre attention.