

Simulations numériques d'écoulements diphasiques par la méthode des volumes finis sur maillages quelconques

Jean-Baptiste Apoung Kamga

Collaboration: R. Eymard, Danielle Hilhorst

Equipe AN-EDP
Université Paris-sud XI

Journées Multiphasiques
Univ. Lyon, 04 Septembre 2008

- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - Traitement des non-linéarités
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Notations et Equations

perméabilité absolue: K , côte descendante: z , accélération de gravité: g .

- indice: α ; w -eau, o -air,
- densité: ρ_α ,
- saturation: s_α ,
- viscosité: μ_α ,
- porosité: ϕ ,
- mobilité : $\lambda_\alpha = k_{r\alpha}/\mu_\alpha$,
- mobilité totale : $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$
- perméabilité relative: $k_{r\alpha}$,
- pression: p_α ,
- pression capillaire:
 $p_c = p_o - p_w$,
- vitesse de Darcy: u_α ,
- terme source ou puits: q_α ,
- fraction de flux: $f_\alpha = \lambda_\alpha/\lambda$

Loi de Darcy

$$u_\alpha = -\frac{Kk_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha g \nabla z)$$

Conservation de la masse

$$\phi \frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha u_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha$$

$$s_w + s_o = 1 \quad p_c(s_w) = p_o - p_w, \quad + \text{CL} + \text{Cl}.$$

Simplifications des équations

Trois formulations (Zhangxin Chen 2005)

① Pression de phase: $p = p_o, \quad s = s_w$

② Pression pondérée : $p = s_w p_w + s_o p_o, \quad s = s_w$

③ Pression globale : $p = p_o + \int^s (f_w \frac{dp_c}{ds})(\xi) d\xi, \quad s = s_w$

Equations résultantes sous l'hypothèse d'incompressibilité

Pression. $u_w + u_o = u$, vitesse totale

$$\nabla u = q(p, s), \quad u = -K(\lambda(s) \nabla p + \gamma_i(s))$$

Saturation

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \left(u f_w(s) + \left(K f_w(s) \lambda_o(s) \frac{dp_c(s)}{ds} \right) \nabla s \right) = q_i(p, s)$$

Des méthodes couramment utilisées

- Éléments finis mixtes et méthodes des caractéristiques (Z. Chen, ...)
- Volumes finis (R. Eymard, R. Herbin, D. Hilhorst, A. Michel, ...)
- Volumes finis spectraux (P. Bastian, ...)
- Éléments finis discontinus (P. Bastian, B. Rivière, ...)
- ...

But visé

Inscrire dans la liste, la méthode des volumes finis pour les tenseurs de diffusion anisotropes sur maillages quelconques:

(R. Heynard, T. Gallouët, R. Herbin, 2008)

Démarche

Définir les différents flux et traiter les non-linéarités.

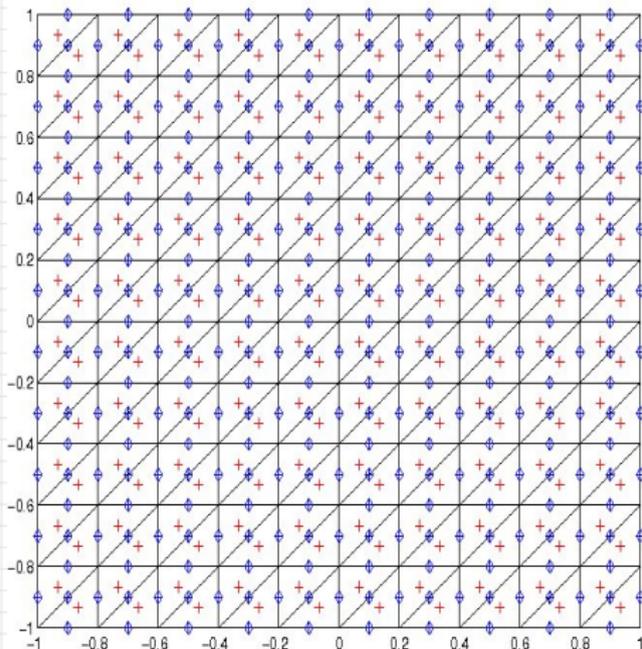
- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - Traitement des non-linéarités
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Discrétisation par volumes finis hybrides (VFHYB)

- Discrétisation: $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$,
- \mathcal{M} , ensemble des mailles,
- \mathcal{E} ensemble des arrêtes,
 - \mathcal{E}_{in} , arrêtes internes,
 - \mathcal{E}_{ext} , arrêtes externes ($\mathcal{E}_{ext} = \mathcal{E}_{ext}^D \cup \mathcal{E}_{ext}^N$),
- $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{M}}$, ensemble des points étoilant chaque maille,
- m_K , mesure de K ; m_σ , mesure de σ .

- \mathcal{E}_K , ensemble des arrêtes de la maille K ,
- \mathcal{M}_σ , ensemble des mailles contenant l'arrête σ ,
- $n_{K,\sigma}$, normale unitaire extérieure à K en $\sigma \in \mathcal{E}_K$,
- $d_{K,\sigma}$, distance de x_K à $\sigma \in \mathcal{E}_K$,
- x_σ , barycentre de σ ,
- $D_{K,\sigma}$, cône de base σ et de sommet x_K .

Principe de la formulation VFHYB



- 1 Inconnues $((u_K)_{K \in \mathcal{M}}, (u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}})$
- 2 Construction du gradient discret constant dans chaque cône.
- 3 Avantages:
 - 1 écriture variationnelle du problème,
 - 2 élimination possible des $(u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$,
 - 3 conservation possible de certains $(u_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}$.

Formule de Stokes dans une maille

$$m(K)\nabla_K u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma)(u_\sigma - u_K)n_{K,\sigma}$$

Ajout d'un terme de stabilisation : (α est un paramètre réel)

$$\nabla_{K,\sigma} u = \nabla_K u + (R_{K,\sigma} u)n_{K,\sigma}, \quad R_{K,\sigma} u = \frac{\alpha}{d_{K,\sigma}} (u_\sigma - u_K - \nabla_K u \cdot (x_\sigma - x_K))$$

Définition du gradient discret par ses valeurs constantes dans chaque cône.

$$\nabla_{\mathcal{D}} u(x) = \nabla_{K,\sigma} u(x), \quad \text{p.p. } x \in D_{K,\sigma}$$

Problème variationnel : $X_{\mathcal{D},0} = \{((v_K)_{K \in \mathcal{M}}, (v_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{E}}) : v_\sigma = 0, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}^{\mathcal{D}}\}$

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in X_{\mathcal{D},0} \text{ tel que } \forall v \in X_{\mathcal{D},0} \\ \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{D}} v(x) \cdot \Lambda(x) \nabla_{\mathcal{D}} u(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K f(x) v_K dx \end{cases}$$

On remarque qu'on peut écrire

$$\nabla_{K,\sigma} u = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K} y^{\sigma\sigma'} (u_{\sigma'} - u_K).$$

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{D}} v(x) \cdot \Lambda(x) \nabla_{\mathcal{D}} u(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K} A_K^{\sigma\sigma'} (u_K - u_{\sigma'}) (v_K - v_{\sigma})$$

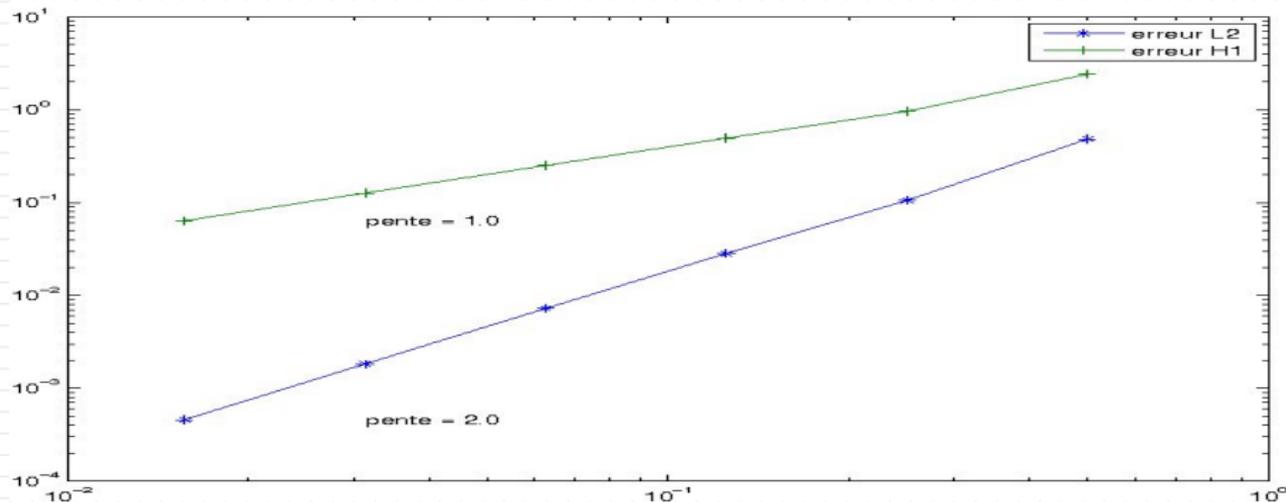
$$\text{avec } A_K^{\sigma\sigma'} = \sum_{\sigma'' \in \mathcal{E}_K} y^{\sigma''\sigma} \cdot \left(\int_{D_{K,\sigma''}} \Lambda(x) dx \right) y^{\sigma''\sigma'}$$

On définit alors le flux diffusif à travers l'écriture équivalente du problème

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u) (v_K - v_{\sigma}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} v_K \int_K f(x) dx \quad \forall v \in X_{\mathcal{D},0}$$

$$F_{K,\sigma}(u) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K} A_K^{\sigma\sigma'} (u_K - u_{\sigma'})$$

$\Lambda = I$. $u = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$, $f = 8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$.
 $\Omega = (0, 1)^2$; maillages: $h = 2^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

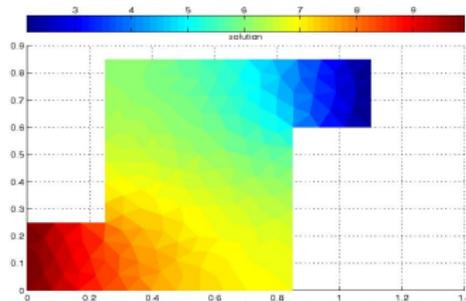
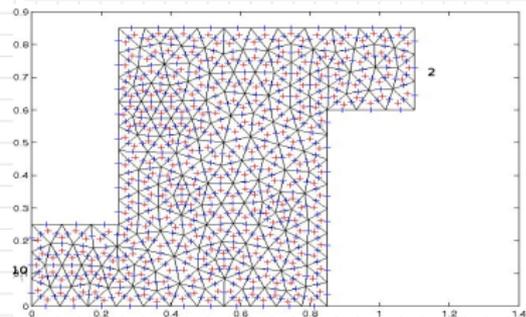


Convergence : $\mathcal{O}(h)$ en norme H^1 et $\mathcal{O}(h^2)$ en norme L^2 .

Procédure d'insertion

- 1 Dirichlet non homogène $u = g$: $u_\sigma = g(x_\sigma) \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}^D$
sous forme forte (comme dans les éléments finis Lagrange).

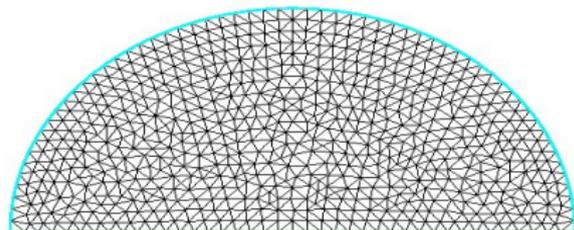
$-\Delta u = 0$ dans Ω , $u = 10$ sur Γ_1 , $u = 2$ sur Γ_2 , $\nabla u \cdot n = 0$ ailleurs.



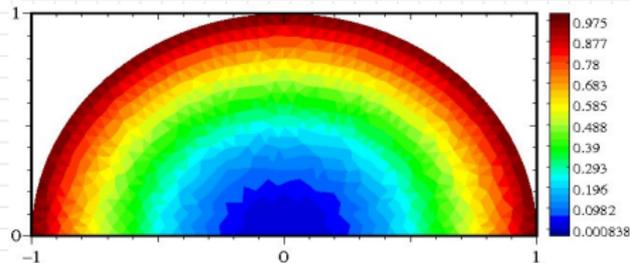
Procédure d'insertion

- Neumann non homogène $(\Lambda \nabla u) \cdot n = g$: imposée sous forme faible $(v_\sigma(\mathcal{F}_{K,\sigma}(u) - m_\sigma g) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}^N)$.

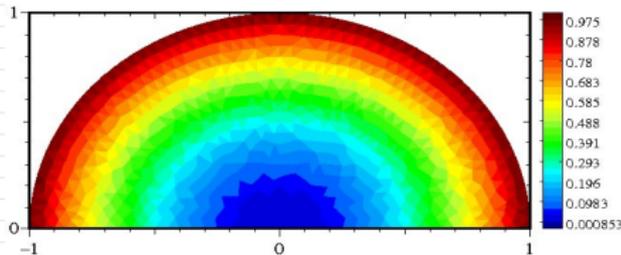
$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= -4 \text{ dans } \Omega, \\
 u &= x^2 + y^2 \text{ sur } \Gamma_1, \\
 \nabla u \cdot n &= 2 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_1
 \end{aligned}$$



$$\Gamma_1 = \partial\Omega$$



$$\Gamma_1 = [-1, 1] \times \{0\}$$



Equation

$$\nabla \cdot (-\Lambda \nabla c) = f \quad \text{dans } \Omega$$

Condition aux limites

$$(\Lambda \nabla c) \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad c = c_D \quad \text{sur } \Gamma_D.$$

Formulation

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \left(-v_K m_K f_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_\sigma F_{K,\sigma}^{diff}(C) + v_\sigma \bar{F}_{K,\sigma}^{diff}(C) \right) = 0$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}(C) = \begin{cases} -F_{K,\sigma}^{diff}(C) & \text{si } \sigma \in K \cap L \\ -F_{K,\sigma}^{diff}(C) - m_\sigma g & \text{si } \sigma \in \Gamma_N \\ C_\sigma - C_D & \text{si } \sigma \in \Gamma_D \end{cases}$$

- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - Traitement des non-linéarités
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Objectifs

- 1 Evaluer le flux diffusif.
- 2 Evaluer le décentrage dans le contexte des schémas hybrides.

Equations

$$\begin{cases} \partial_t C + \nabla \cdot (u C) = S & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ C|_{t=0} = C_0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ C = C_{in} & \text{sur }]0, T[\times \Gamma_{in}, \quad \Gamma_{in} = \{x \in \partial\Omega : u(x) \cdot n < 0\} \end{cases}$$

avec $u = -\Lambda \nabla p$ et p solution de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\Lambda \nabla p) = f & \text{dans } \Omega \\ p = p_D & \text{sur } \Gamma_D \\ (\Lambda \nabla p) \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \left\{ v_K m_K \left(\frac{C_K^{n+1} - C_K^n}{\Delta t} - f_K^{n+1} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \left(v_{k\sigma} F_{K,\sigma}^{conv}(C^{n+1}) + v_{\sigma} \bar{F}_{K,\sigma}^{conv}(C^{n+1}) \right) \right\} = 0$$

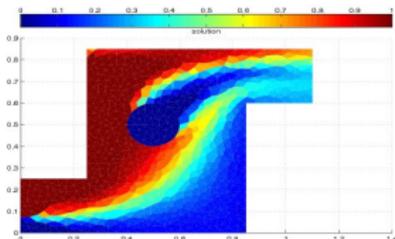
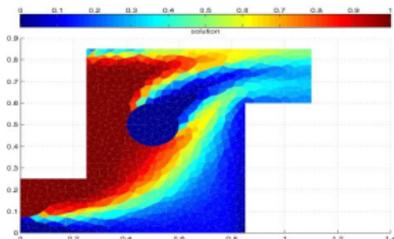
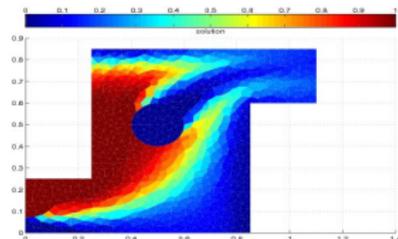
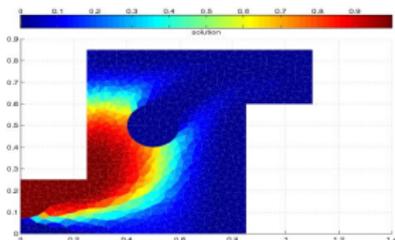
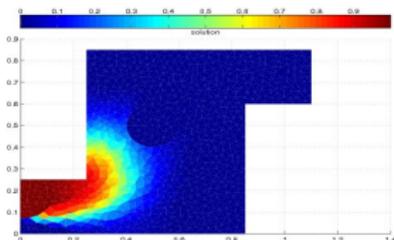
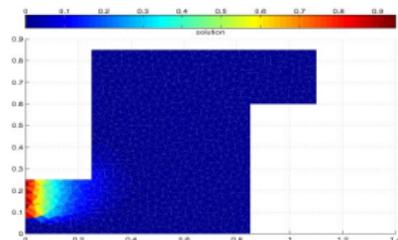
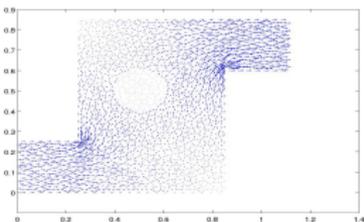
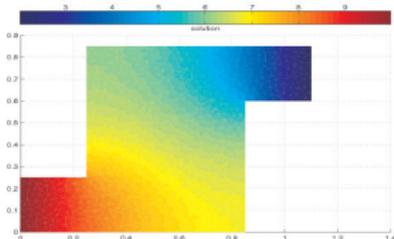
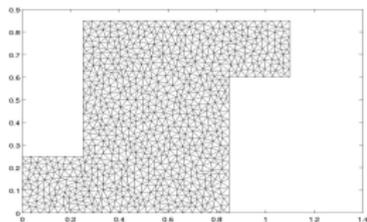
$$F_{K,\sigma}^{conv}(C) = \begin{cases} m_{\sigma} u \cdot n_{K,\sigma} C_k & \text{si } u \cdot n_{K,\sigma} > 0 \\ m_{\sigma} u \cdot n_{K,\sigma} C_{\sigma} & \text{si } u \cdot n_{K,\sigma} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}^{conv}(C) = \begin{cases} C_{\sigma} - C_K & \text{si } u \cdot n_{K,\sigma} \geq 0 \\ C_{\sigma} - C_{in} & \text{si } \sigma \in \Gamma_{in} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remplacer $m_{\sigma} u \cdot n_{K,\sigma}$ par $F_{K,\sigma}^{diff}(p)$

si la vitesse $u = -\Lambda \nabla p$ est issue d'un problème de diffusion.

Flux convectif 3/3



- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - Traitement des non-linéarités
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Equation

$$\nabla \cdot (uc - \Lambda \nabla c) = f \quad \text{dans } \Omega$$

Condition aux limites

$$\begin{array}{lll} (\Lambda \nabla c) \cdot n = g_{out} & \text{sur} & \Gamma_{out} \\ (uc - \Lambda \nabla c) \cdot n = g_{in} & \text{sur} & \Gamma_{in} \\ c = c_D & \text{sur} & \Gamma_D \end{array}$$

$$\Gamma_{in} = \{x \in \partial\Omega : u \cdot n < 0\}, \quad \partial\Omega = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_D, \text{ partition.}$$

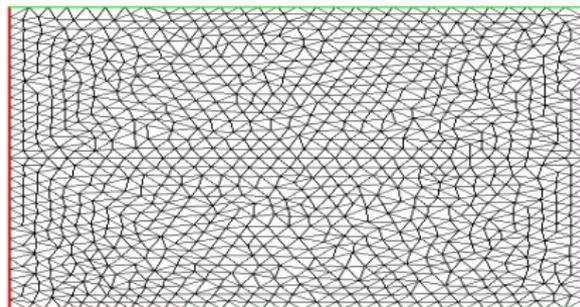
Formulation

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \left(-v_K m_K f_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_\sigma F_{K,\sigma}(C) + v_\sigma \bar{F}_{K,\sigma}(C) \right) = 0$$

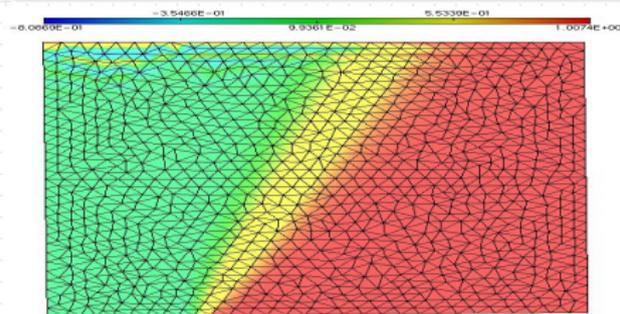
$$F_{K,\sigma}(C) = F_{K,\sigma}^{conv}(C) + F_{K,\sigma}^{diff}(C).$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}(C) = \begin{cases} m_\sigma u \cdot n_{K,\sigma} (C_\sigma - C_K) - F_{K,\sigma}^{diff}(C) & \text{si } u \cdot n_{K,\sigma} \geq 0 \text{ et } \sigma \in K \cap L \\ -F_{K,\sigma}^{diff}(C) & \text{si } u \cdot n_{K,\sigma} < 0 \text{ et } \sigma \in K \cap L \\ -F_{K,\sigma}^{diff}(C) - m_\sigma g_{out} & \text{si } \sigma \in \Gamma_{out} \\ -F_{K,\sigma}^{conv}(C) - F_{K,\sigma}^{diff}(C) + m_\sigma g_{in} & \text{si } \sigma \in \Gamma_{in} \\ C_\sigma - C_D & \text{si } \sigma \in \Gamma_D \end{cases}$$

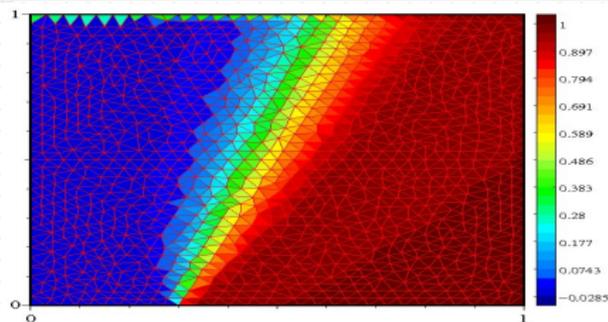
$\nabla \cdot (uc - \varepsilon \Delta c) = 0$ dans $]0, 1[^2$,
 $c = 0$ sur Γ_1 (portion en rouge),
 $c = 1$ sur Γ_2 (portion en vert),
 $u = (1, 3)^T$, $\varepsilon = 0.01$.



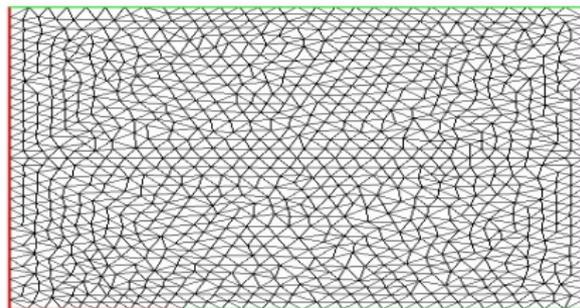
Solution par EF P1 (Freefem++)



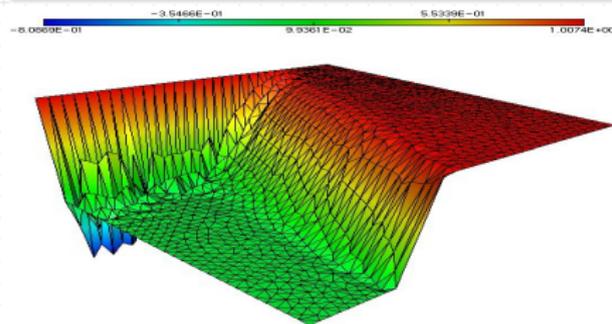
Solution par VFHYB



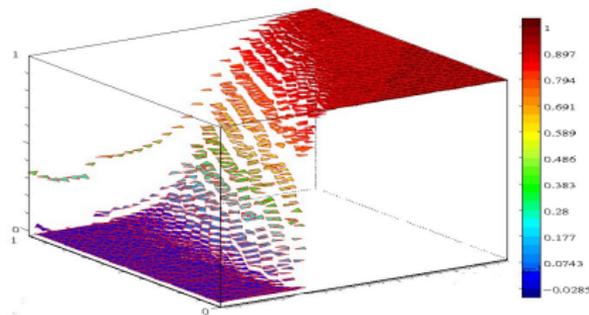
$\nabla \cdot (uc - \varepsilon \Delta c) = 0$ dans $]0, 1[^2$,
 $c = 0$ sur Γ_1 (portion en rouge),
 $c = 1$ sur Γ_2 (portion en vert),
 $u = (1, 3)^T$, $\varepsilon = 0.01$.



Solution par EF P1 (Freefem++)



Solution par VFHYB



- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - **Traitement des non-linéarités**
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Algorithme de Newton pour $f(x) = 0$

- 1 Initialisation: $x_0, r_0 = f(x_0)$
- 2 Itération jusqu'à convergence :
 - résolution : $J_{ac}(x_k)\delta_k = -r_k$
 - mise à jour: $x_{k+1} = x_k + \delta_k$
 - évaluation : $r_{k+1} = f(x_k)$
- 3 Critère d'arrêt $|r_{k+1}| < \varepsilon|r_0|$

Inversion du système linéaire: $J_{ac}(x_k)\delta_k = r_k$?

- méthodes itératives: GC, GMRES, BiCGStab, ...
- méthodes **directes** pour **matrices creuses**: UMFPACK.

Calcul de la matrice jacobienne ?

- calcul explicite, approximation par différences divisées (jacobian-free).
- **différentiation automatique**.

Différentiation Automatique (DA)

But: calculer de manière automatique les dérivées des fonctions.

Principe: cas des fonctions à une variable

- Par analogie avec l'ensemble \mathbb{Z} dont une base est $(1, i)$ avec $i^2 = -1$, créé un ensemble DA de base $(1, da)$ telle que $da^2 = 0$.
- Y représenter chaque fonction $f(x)$ par $\tilde{f}(x) = f(x) + f'(x)da$
- Y étendre les opérations algébriques.

Ainsi, $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = f(x)g(x) + (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) da$,
fournissant la dérivée du produit $f(x)g(x)$ au point x

Quelques logiciels libres dédiés

- ADIFOR, TAPENADE, ADOL-F : (Fortran, 77, 90, 95)
- FAD, CppAD, **ADOL-C** : (C/C++)
- ...

Gradient de l'inconnue comme coefficient

- Quelle expression pour le gradient discret lorsqu'il est coefficient.

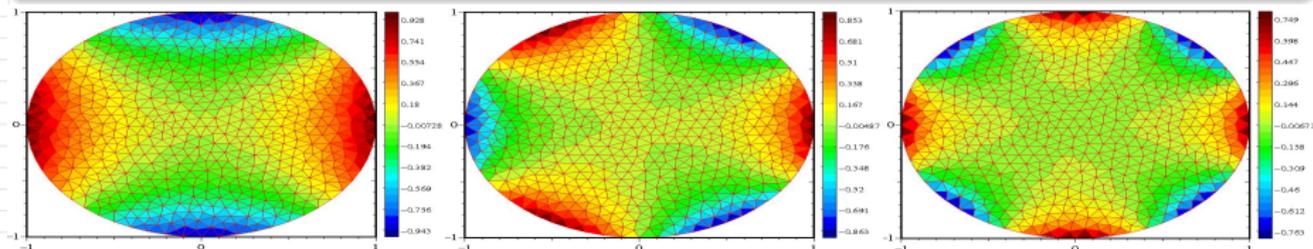
Problème modèle: surface minimale

Chercher la surface d'aire minimale s'appuyant sur une courbe fermée $g(x, y) = 0$ et dont la projection sur un plan forme un domaine borné Ω

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \nabla u \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- $|\nabla_K u|^2$ plutôt que $|\nabla_{K,\sigma} u|^2$.
- Υ inclure les conditions aux limites.

$$\Omega = \mathcal{C}(0, 1), g(x, y) = \cos(k \arccos(x)), k = 2, k = 3, k = 4$$



Inconnue comme coefficient

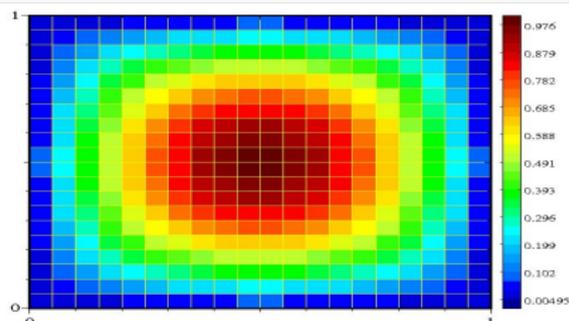
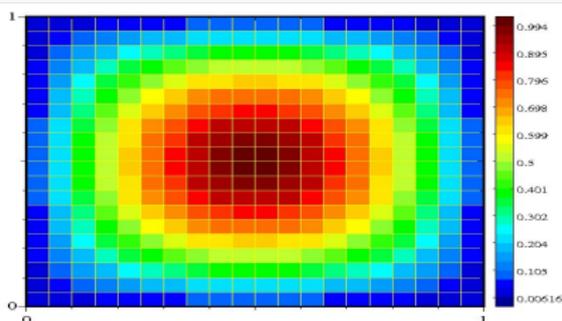
- Quelle expression pour l'inconnue lorsqu'elle est coefficient.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (d(u)\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- $d(u_K)$ plutôt que $d(u_\sigma)$.
- Attention au zéro de $d(\cdot)$.

$$\Omega = (0, 1)^2, d(s) = s(1 - s), u_{exact}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Solution exacte (gauche), solution VFHYB (droite): (iter = 9, tol = 10^{-14}).



- 1 Motivations, équations et simplifications
- 2 Volumes finis sur maillages quelconques (VFHYB)
 - Flux diffusif
 - Flux convectif
 - Flux convectif-diffusif
 - Traitement des non-linéarités
- 3 VFHYB pour écoulements diphasiques
 - Equation et décentrage
- 4 Conclusion et perspectives

Formulation en pression globale en l'absence de gravité

$$\begin{cases} \nabla u = q(p, s), & u = -\Lambda(s)\nabla p & \text{dans } \Omega \\ \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (uf(s) + D(s)\nabla s) = h(p, s) & & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$$p = p_D \text{ sur } \Gamma_D^p,$$

$$(\Lambda(s)\nabla p) \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N^p$$

$$s = s_D \text{ sur } \Gamma_D^s,$$

$$(G(s)\nabla p) \cdot n = g_{out} \text{ sur } \Gamma_{out},$$

$$(uf(s) + D(s)\nabla s) \cdot n = g_{in} \text{ sur } \Gamma_{in}$$

Condition initiale seulement sur la saturation : $s|_{t_0} = s_0$.

Equation de la pression

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} (-v_K m_K q(P_K^{n+1}, S_K^{n+1})) + \sum_{K \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_k F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) + v_\sigma \bar{F}_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) \right) = 0$$

Le flux diffusif $F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1})$ est défini comme précédemment.
 S_K^{n+1} traduit la dépendance par rapport à la saturation.

$$\bar{F}_{K,\sigma}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) = \begin{cases} -F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) & \text{si } \sigma \in K \cap L \\ -F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) - m_\sigma g^{n+1} & \text{si } \sigma \in \Gamma_N^P \\ C_\sigma^{n+1} - C_D^{n+1} & \text{si } \sigma \in \Gamma_D^P \end{cases}$$

Equation de la saturation

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} v_K m_K \phi \left(\frac{S_K^{n+1} - S_K^n}{\Delta t} - h(P_K^{n+1}, S_K^{n+1}) \right) + \sum_{K \in \mathcal{M}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} v_{\sigma} F_{K,\sigma}(S_K^{n+1}) + v_{\sigma} \bar{F}_{K,\sigma}(S_K^{n+1}) \right) = 0$$

Avec $F_{K,\sigma}(S_K^{n+1}) = F_{K,\sigma}^{conv}(S_K^{n+1}) + F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1})$

Le flux diffusif $F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1})$ est comme à précédemment.

Pour le flux convectif:

$$F_{K,\sigma}^{conv}(S^{n+1}) =$$

$$\begin{cases} m_{\sigma} F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) f(S_K^{n+1}) & \text{si } F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) > 0 \\ m_{\sigma} F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) f(S_{\sigma}^{n+1}) & \text{si } F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}(S^{n+1}) = \begin{cases} -F_{K,\sigma}^{diff}(S^{n+1}) - m_\sigma g_{out}^{n+1} & \text{si } \sigma \in \Gamma_{out} \\ -F_{K,\sigma}^{conv}(S^{n+1}) - F_{K,\sigma}^{diff}(S^{n+1}) + m_\sigma g_{in}^{n+1} & \text{si } \sigma \in \Gamma_{in} \\ S_\sigma^{n+1} - s_D^{n+1} & \text{si } \sigma \in \Gamma_D^s \end{cases}$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}(S^{n+1}) = -F_{K,\sigma}^{diff}(S^{n+1}) \quad \text{si } F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) < 0 \text{ et } \sigma \in K \cap L$$

$$\bar{F}_{K,\sigma}(S^{n+1}) = m_\sigma F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1})(f(S_\sigma^{n+1}) - f(S_K^{n+1})) - F_{K,\sigma}^{diff}(S^{n+1})$$

si

$$F_{K,\sigma}^{diff}(S_K^{n+1}; C^{n+1}) \geq 0 \text{ et } \sigma \in K \cap L$$

Conclusion

- Proposition et évaluation numérique d'une formulation volumes finis géométrique sur maillages quelconques :
 - les différents flux propres aux écoulements diphasiques
 - les non-linéarités issues des écoulements diphasiques
- Proposition des outils pour sa mise en oeuvre efficace
 - Utilisation de la différentiation automatique pour calculer la jacobienne (ADOL-C)
 - Utilisation d'une méthode directe pour matrices creuses pour l'inversion de la jacobienne (UMFPACK)

Perspectives

- L'évaluer (étude de la convergence et estimation d'erreur).
- La modifier si besoin pour assurer le principe du maximum.
- La comparer avec d'autres méthodes (volumes finis, éléments finis discontinus).
- La valider sur des cas tests 3D réalistes (MOMAS).