Problème de Cauchy pour des modèles multiphasiques compressibles dégénérés en milieux poreux

Cédric Galusinski [1] , Mazen Saad [2]

1 : IMATH, Université de Toulon

2 : Lab. Jean Leray, Ecole Centrale de Nantes.

Plan

Modélisation

- modèle multifluide compressible m phases
- introduction des hypothèses
- rôle de la pression globale

Modèle stationnaire

- estimation de dissipation
- compacité et pression globale

Modèle instationnaire

- estimation d'énergie
- problème de Cauchy

Modélisation

conservation de la masse:

$$\phi(x)\partial_t(\rho_i s_i)(t,x) + \mathrm{div}\ (\rho_i \mathbf{V}_i)(t,x) + \rho_i s_i f_P(t,x) = \rho_i s_i^I f_I(t,x), \qquad i = 1 \cdots m,$$

Modélisation

conservation de la masse:

$$\phi(x)\partial_t(\rho_i s_i)(t,x) + \mathrm{div}\ (\rho_i \mathbf{V}_i)(t,x) + \rho_i s_i f_P(t,x) = \rho_i s_i^I f_I(t,x), \qquad i = 1\cdots m,$$

Loi de Darcy pour les vitesses $\mathbf{V}_i$

$$\mathbf{V}_i(t,x) = -\mathbf{K}(x) M_i(\mathbf{s})\big(\nabla p_i(t,x) - \rho_i \mathbf{g}\big), \qquad i = 1\cdots m,$$

les saturations:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i(t,x) = 1, \quad s_i \geq 0.$$

Densité et pression capillaire

$$\rho_i = \rho_i(p_i), \qquad p_{1j}(\mathbf{s}(t,x)) = p_1(t,x) - p_j(t,x), \quad j = 2\cdots m, \quad \mathbf{s} = (s_2, \cdots, s_m).$$

Modélisation

Pression capillaire et hypothèse

$$P_c = (p_{11}, \cdots, p_{1m}) = -\nabla_{\mathbf{s}} F \text{ et } \partial_{s_i} p_{1i} \leq 0.$$

Hypothèse 1: les pressions capillaires dérivent d'un potentiel (trivial en diphasique).
Hypothèse 2: comportement "monotone" (généralisation du diphasique).

Modélisation

Pression capillaire et hypothèse

$$P_c = (p_{11}, \cdots, p_{1m}) = -\nabla_{\mathbf{s}} F \text{ et } \partial_{s_i} p_{1i} \leq 0.$$

Hypothèse 1: les pressions capillaires dérivent d'un potentiel (trivial en diphasique).
Hypothèse 2: comportement "monotone" (généralisation du diphasique).

Introduction d'une pression globale:

$$p_i = p + g_i(\mathbf{s}), \quad i = 1 \cdots m,$$

telle que

$$\sum_{j=1}^{m} M_j(\mathbf{s}) \nabla g_j(\mathbf{s}) = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{m} M_j(\mathbf{s}) \nabla p_j = \sum_{j=1}^{m} M_j(\mathbf{s}) \nabla p.$$

Modélisation

Les fonctions g_i sont définies par

$$g_i(\mathbf{s}) = g_1(\mathbf{s}) - p_{1i}(s_i), \quad i = 2 \cdots m.$$

On définit la mobilité totale

$$M(\mathbf{s}) = \sum_{j=1}^{m} M_j(\mathbf{s}).$$

Hypothèse 3: Si $\frac{1}{M(\mathbf{s})} \sum_{j=2}^{m} M_j(\mathbf{s}) \nabla p_{1j}(\mathbf{s})$ est un gradient, g_1 est défini par

$$\nabla g_1(\mathbf{s}) = \frac{1}{M(\mathbf{s})} \sum_{j=2}^{m} M_j(\mathbf{s}) \nabla p_{1j}(\mathbf{s}).$$

Modélisation

Hypothèse 4:
il existe A_j une fonction de $\mathbb{R}^{m-1}$ t dans $\mathbb{R}$ ($j = 1 \cdots m$) telle que

$$\sqrt{M_j(\mathbf{s})}\nabla g_j = \nabla A_j(\mathbf{s}). \tag{0}$$

En diphasique:

$$g_1(s_2) = g_1(0) + \int_0^{s_2} \frac{M_2(z)}{M(z)} p'_{12}(z)\, dz.$$

et

$$\sqrt{M_1(1-s_2)}g'_1(s_2) = A'_1(s_2), \quad \sqrt{M_2(s_2)}g'_2(s_2) = A'_2(s_2).$$

On a l'identité remarquable:

$$\sum_{j=1}^{m} M_j(\mathbf{s})|\nabla p_j|^2 = M(\mathbf{s})|\nabla p|^2 + \sum_{j=1}^{m} |\nabla A_j(\mathbf{s})|^2.$$

Notations: Conditions initiales et au bord

Le bord: $\partial\Omega = \Gamma_{inj} \cup \Gamma_{imp}$, avec Γ_{inj} le bord d'injection connu et Γ_{imp} le bord imperméable.

$$\left\{ \begin{array}{l} s_j(t,x) = s_j^\Gamma \geq 0, \quad j = 1 \cdots m, \; \sum_{j=1}^m s_j^\Gamma = 1, \quad p_1(t,x) = p_1^\Gamma \text{ sur } \Gamma_{inj} \\ \mathbf{V}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{imp}, \quad j = 1 \cdots m. \end{array} \right. \tag{0}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à Γ_{imp} .

Les relations des pressions capillaires complètent les données.

Données initiales:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_j(0,x) = p_j^0(x) \text{ dans } \Omega \quad j = 1 \cdots m \\ s_j(0,x) = s_j^0(x) \text{ dans } \Omega, \quad j = 1 \cdots m. \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m s_j^0 = 1, \; s_j^0 \geq 0. \end{array} \right. \tag{0}$$

Hypothèse

(H 1) La porosité ϕ est régulière et $0 < \phi_0 \leq \phi(x) \leq \phi_1$.

(H 2) Le tenseur $\mathbf{K}$ est borné régulier et coercif:

$$\|\mathbf{K}\|_{(L^\infty(\Omega))^{d\times d}} \leq k_\infty \quad \text{et} \quad (\mathbf{K}(x)\xi,\xi) \geq k_0|\xi|^2 \qquad \text{(for all } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p.} x \in \Omega).$$

(H 3) Les mobilités M_i sont régulières positives et

$$M(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{m} M_i(\mathbf{s}) \geq m_0.$$

(H 4) $(f_P, f_I) \in (L^2(Q_T))^2$, $f_P(t,x)$, $f_I(t,x) \geq 0$ p.p. $(t,x) \in Q_T$, $s_i^I(t,x) \geq 0$ $(i = 1 \cdots m)$ et $\sum_{i=1}^m s_i^I(t,x) = 1$ p.p. $(t,x) \in Q_T$.

(H 5) Les densités ρ_i ($i = 1 \cdots m$) sont croissantes, régulières, bornées et non dégénérées: $0 < \rho_m \leq \rho_i(p) \leq \rho_M$.

(H 6) The functions $\mathbf{s} \to A(\mathbf{s}) = (A_2(\mathbf{s}), \cdots, A_m(\mathbf{s}))$ est inversible et A^{-1} est $\theta-$ Hölderienne ($0 < \theta \leq 1$).

(H 7) Les fonctions g_i sont régulières.

Modèle stationnaire

$$-\text{div}\,\left(\rho_i(p_i)\mathbf{K}M_i(\mathbf{s})\big(\nabla p_i - \rho_i(p_i)\mathbf{g}\big) + \rho_i(p_i)s_i f_P = \rho_i(p_i)s_i^I f_I, \qquad i = 1\cdots m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = 1, \quad s_i \geq 0.$$

$$p_{1j}(\mathbf{s}) = p_1 - p_j, \quad j = 2\cdots m, \quad \mathbf{s} = (s_2, \cdots, s_m).$$

D’où l’estimation d’énergie:

$$\int_\Omega M_i(\mathbf{s})|\nabla p_i(\mathbf{s})|^2\, dx < +\infty$$

On conclut avec:

$$\sum_{i=1}^{m} M_i(\mathbf{s})|\nabla p_i(\mathbf{s})|^2 = M(\mathbf{s})|\nabla p(\mathbf{s})|^2 + \sum_{i=1}^{m} |\nabla A_i(\mathbf{s})|^2.$$

Modèle instationnaire

Théorème Le modèle multiphasique compressible admet une soluton faible classique globale vérifiant $s_i \geq 0$ p.p. dans Q_T, ($i = 1 \cdots m$). De plus

$$\int_\Omega \partial_t E \, dx + \sum_{i=1}^m \int_\Omega \mathbf{K} M_i(\mathbf{s}) \nabla p_i \cdot \nabla p_i \, dx - \sum_{i=1}^m \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_i(p_i) M_i(\mathbf{s}) \mathbf{g} \cdot \nabla p_i \, dxdt$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_{Q_T} \rho_i(p_i) s_i f_P r_i(p_i) \, dxdt = \sum_{i=1}^m \int_{Q_T} \rho_i(p_i) s_i^I f_I r_i(p_i),$$

où $E = \sum_{i=1}^m (\rho_i(p_i) s_i r_i(p_i) - s_i p_i) + F(\mathbf{s})$, avec $r_i(p_i) = \int_0^{p_i} \frac{1}{\rho_i(z)} \, dz$ et F est le potentiel des pressions capillaires ($-\nabla_{\mathbf{s}} F = P_c$). La fonction E est minorée et

$$\int_{Q_T} \sum_{i=1}^m M_i(\mathbf{s}) |\nabla p_i|^2 \, dxdt + \int_{Q_T} |\nabla A(\mathbf{s})|^2 \, dxdt < +\infty.$$

Modèle instaionnaire: clef formelle

Clef : Le produit scalaire de l'équation de conservation de la masse avec $r_i(p_i) = \int_0^{p_i} \frac{1}{\rho_i(z)}\, dz$.

$$\partial_t(\rho_i(p_i)s_i)r_i(p_i) = \partial_t(\rho_i(p_i)s_i r_i(p_i)) - s_i\partial_t(p_i).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{m} s_i\partial_t p_i = \partial_t(\sum_{i=1}^{m} s_i p_i) + \sum_{i=1}^{m} p_{1i}\partial_t s_i - p_1\partial_t(\sum_{i=1}^{m} s_i)$$

Finalement,

$$\sum_{i=1}^{m} s_i\partial_t p_i = \partial_t(\sum_{i=1}^{m} s_i p_i) - \partial_t F(\mathbf{s}).$$

Conclusions

Existence d'une solution globale par dissipation dégénérée des pressions.

-Résultat diphasique compressible aussi complet que diphasique incompressible (85')
Améliore les résultats GS (2007-2008).

-Résultat triphasique compressible aussi complet que triphasique incompressible (92')

-ecriture généralisée au multifluide.