Points rationnels sur une intersection de formes diagonales

Simon Boyer

Institut Camille Jordan

24 février 2015

1) Introduction

Qu'étudie-t-on ?

Nombre de solutions entières $1 \leq x_1, \ldots, x_t \leq X$ de

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{d_1} + \cdots + a_{1,t}x_t^{d_1} = 0 \\ a_{2,1}x_1^{d_2} + \cdots + a_{2,t}x_t^{d_2} = 0 \\ \ldots \\ a_{k,1}x_1^{d_k} + \cdots + a_{k,t}x_t^{d_k} = 0 \end{cases}$$

avec des entiers $a_{i,j}$ et des entiers $0 < d_1 < \cdots < d_k$.

1) Introduction

Qu'étudie-t-on ?

Nombre de solutions entières $1 \leq x_1, \ldots, x_t \leq X$ de

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{d_1} + \cdots + a_{1,t}x_t^{d_1} = 0 \\ a_{2,1}x_1^{d_2} + \cdots + a_{2,t}x_t^{d_2} = 0 \\ \ldots \\ a_{k,1}x_1^{d_k} + \cdots + a_{k,t}x_t^{d_k} = 0 \end{cases}$$

avec des entiers $a_{i,j}$ et des entiers $0 < d_1 < \cdots < d_k$.

Objectif de mes travaux

• Majoration asymptotique (en X) du nombre de solutions

• Équivalent (en X) du nombre de solutions

1) Introduction

Qu'étudie-t-on ?

Nombre de solutions entières $1 \leq x_1, \ldots, x_t \leq X$ de

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{d_1} + \cdots + a_{1,t}x_t^{d_1} = 0 \\ a_{2,1}x_1^{d_2} + \cdots + a_{2,t}x_t^{d_2} = 0 \\ \ldots \\ a_{k,1}x_1^{d_k} + \cdots + a_{k,t}x_t^{d_k} = 0 \end{cases}$$

avec des entiers $a_{i,j}$ et des entiers $0 < d_1 < \cdots < d_k$.

Domaines connexes

- problème de Waring
- sommes de Weyl
- distribution des polynômes modulo 1
- localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann.

• 1770 : **E. Waring**, problème de l'écriture des entiers en au plus $g(k)$ puissance k-ième.
• 1909 : **D. Hilbert**, existence de $g(k)$ pour tout k.
• 1916 : **H. Weyl**, méthodes de différences finies.
• 1920 : **G. Hardy & J. Littlewood**, méthode du cercle.
• 1922 : **J. van der Corput**, amélioration des méthodes de différences finies.
• 1935 : **I. Vinogradov**, amélioration de toutes ces méthodes dans le cadre de systèmes invariants par translation-dilatation.
• 2012 : **T. Wooley**, méthode des congruences efficaces et fait faire un bond aux travaux de Vinogradov.

Des systèmes d'équations diophantiennes aux sommes d'exponentielles

On note $e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha)$. Pour n entier,

$$\int_0^1 e(\alpha n) \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Des systèmes d'équations diophantiennes aux sommes d'exponentielles

On note $e(\alpha) = \exp(2i\pi\alpha)$. Pour n entier,

$$\int_0^1 e(\alpha n)\mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$\sum_{1 \leq x_1,\ldots,x_t \leq X} \int_0^1 e(\alpha(a_{i,1}x_1^{d_i} + \cdots + a_{i,t}x_t^{d_i}))\mathrm{d}\alpha$$

compte le nombre de solutions entières $1 \leq x_1, \ldots, x_t \leq X$ de

$$a_{i,1}x_1^{d_i} + \cdots + a_{i,t}x_t^{d_i} = 0$$

En conclusion,

$$\sum_{1\leq x_1,\dots,x_t\leq X}\int_{[0,1]^k} e\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(a_{i,1}x_1^{d_i}+\cdots+a_{i,t}x_t^{d_i})\right)\mathrm{d}\overrightarrow{\alpha}$$

compte le nombre de solutions entières $1\leq x_1,\dots,x_t\leq X$ de

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{d_1}+\cdots+a_{1,t}x_t^{d_1}=0\\ a_{2,1}x_1^{d_2}+\cdots+a_{2,t}x_t^{d_2}=0\\ \dots\\ a_{k,1}x_1^{d_k}+\cdots+a_{k,t}x_t^{d_k}=0\end{cases}$$

On peut aussi l'écrire

$$\int_{[0,1]^k}\prod_{j=1}^{t}\sum_{1\leq x\leq X} e\left(a_{1,j}\alpha_1x^{d_1}+\cdots+a_{k,j}\alpha_kx^{d_k}\right)\mathrm{d}\overrightarrow{\alpha}$$

Cas particulier (invariance par translation) :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_s = y_1 + \cdots + y_s \\ x_1^2 + \cdots + x_s^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2 \\ \ldots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k = y_1^k + \cdots + y_s^k \end{cases} .$$

Cas particulier (invariance par translation) :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_s = y_1 + \cdots + y_s \\ x_1^2 + \cdots + x_s^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2 \\ \ldots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k = y_1^k + \cdots + y_s^k \end{cases}.$$

Nombre de solutions entières
$1 \leq x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \leq X$ donné par

$$\int_{[0,1]^k} \left(\sum_{1 \leq x, y \leq X} e\left(\alpha_1(x-y) + \cdots + \alpha_k(x^k - y^k)\right) \right)^s \mathrm{d}\overrightarrow{\alpha}$$

donc par

$$\int_{[0,1]^k} \left| \sum_{1 \leq x \leq X} e\left(\alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k\right) \right|^{2s} \mathrm{d}\overrightarrow{\alpha}.$$

2) Majoration asymptotique via les congruences efficaces

On étudie le nombre $J_{s,k}(X)$ de solutions entières $1 \leq x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \leq X$ de systèmes du type

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_s = y_1 + \cdots + y_s \\ x_1^2 + \cdots + x_s^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2 \\ \ldots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k = y_1^k + \cdots + y_s^k \end{cases} .$$

Au moins $s! \cdot X^s$ solutions : les solutions diagonales, lorsque $(x_1, \ldots, x_s)$ est une permutation de $(y_1, \ldots, y_s)$.

Conjecture

$$J_{s,k}(X) \ll X^{\epsilon}\left(X^{s}+X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}\right)$$

Conjecture

$$J_{s,k}(X) \ll X^{\epsilon}\left(X^s + X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}\right)$$

Théorème (Wooley, 2014)

La conjecture est vraie dans les cas suivants :
i) k=1, 2 ou 3
ii) $1 \leq s \leq \frac{1}{4}(k+1)^2$
iii) $s \geq k(k-1)$
iv) $1 \leq s \leq \frac{1}{2}k(k+1) - \frac{1}{3}k + O\left(k^{\frac{2}{3}}\right)$

On étudie le nombre $G_{t,k}(X)$ de solutions $1 \leq x_1, \dots, x_t \leq X$ de systèmes du type

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1^{d_1} + \cdots + a_{1,t}x_t^{d_1} = 0 \\ a_{2,1}x_1^{d_2} + \cdots + a_{2,t}x_t^{d_2} = 0 \\ \dots \\ a_{k,1}x_1^{d_k} + \cdots + a_{k,t}x_t^{d_k} = 0 \end{cases}$$

avec des entiers $a_{i,j} \neq 0$ et des entiers $0 < d_1 < \cdots < d_k$.

Conjecture

Pour t "suffisamment grand", $G_{t,k}(X) \ll X^{t-D_k+\epsilon}$ où D_k est la sommes des d_i.

Conjecture

Pour t "suffisamment grand", $G_{t,k}(X) \ll X^{t-D_k+\epsilon}$ où D_k est la sommes des d_i.

Théorème

La conjecture est vraie si $t \geq 2d_k(d_k-1)$.

C'est une conséquence du cas invariant par translation.

Il faut majorer $G_{t,k}$ en fonction de $J_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor, d_k}(X)$.

Changement de variables $\Rightarrow a_{i,j} = 1$.

Majoration triviale sur toutes les valeurs possibles des équations manquantes :

$$\begin{aligned} G_{t,k} &\ll X^{\text{degrés manquants}} J_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor, d_k}(X) \\ &\ll X^{\text{degrés manquants}} X^{t - \text{tous les degrés} + \epsilon} \\ &\ll X^{t - D_k + \epsilon} \end{aligned}$$

Congruences efficaces

Théorème (Wooley, 2014)

Si $s \geq k(k-1)$*, alors* $J_{s,k}(X) \ll X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}+\epsilon}$.

Congruences efficaces

Théorème (Wooley, 2014)

Si $s \geq k(k-1)$, alors $J_{s,k}(X) \ll X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}+\epsilon}$.

Idée de la preuve :

Point clé : Choisir un "bon" nombre premier p.

Première étape : Étudier le système selon les congruences mod p de $2k$ variables pour obtenir des infos mod p^k des $2s-2k$ variables restantes.

Deuxième étape : Recommencer mod p^k, puis mod p^{k^2}, mod p^{k^3}, ...

Première étape :

$$J_{s,k}(X) \leq p^{2s-2k} \max_{1 \leq \xi \leq p} \oint |f(\overrightarrow{\alpha})|^{2k} \left| \sum_{\substack{1 \leq x \leq X \\ x \equiv \xi [p]}} e(\alpha_1 x + \dots) \right|^{2s-2k}$$

Première étape :

$$J_{s,k}(X)$$

$$\leq p^{2s-2k} \max_{1\leq\xi\leq p} \oint |f(\overrightarrow{\alpha})|^{2k} \left| \sum_{\substack{1\leq x\leq X \\ x\equiv\xi[p]}} e(\alpha_1 x + \dots) \right|^{2s-2k}$$

Intégrale de droite

$=$ nombre de solutions d'un système

$\ll p^{\frac{k(k-1)}{2}}$ fois nombre de solutions du même système avec $x_1 \equiv y_1[p^k], \dots, x_k \equiv y_k[p^k]$

Deuxième étape :

$$J_{s,k}(X)$$
$$\ll p^{2s-2k+\frac{k(k-1)}{2}+k^2}$$
$$\max_{\substack{1\leq\xi\leq p\\ 1\leq\sigma\leq p^k}} \oint \left|\sum_{\substack{1\leq x\leq X\\ x\equiv\sigma[p^k]}} e(\alpha_1 x+\dots)\right|^{2k} \left|\sum_{\substack{1\leq x\leq X\\ x\equiv\xi[p]}} e(\alpha_1 x+\dots)\right|^{2s-2k}$$

Inégalité de Hölder pour échanger $2k$ et $2s-2k$, et on recommence avec p^k au lieu de p, etc ...

Arrivés à p^{k^N}, on choisit p tel que $X^{\frac{1}{k^N}} < p \leq 2X^{\frac{1}{k^N}}$.

On a $p^{k^N} > X$, donc l'info $x_1 \equiv y_1[p^{k^N}], \dots,$
$x_k \equiv y_k[p^{k^N}]$ devient $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

On remplace ces $2k$ variables par X^k.
On utilise $p \ll X^{\frac{1}{k^N}}$ pour majorer $J_{s,k}(X)$ en fonction de $J_{s-k,k}(X)$ et d'une puissance de X.

Arrivés à p^{k^N}, on choisit p tel que $X^{\frac{1}{k^N}} < p \leq 2X^{\frac{1}{k^N}}$.

On a $p^{k^N} > X$, donc l'info $x_1 \equiv y_1[p^{k^N}], \ldots,$ $x_k \equiv y_k[p^{k^N}]$ devient $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.

On remplace ces $2k$ variables par X^k.
On utilise $p \ll X^{\frac{1}{k^N}}$ pour majorer $J_{s,k}(X)$ en fonction de $J_{s-k,k}(X)$ et d'une puissance de X.

On note η_s l'inf des η_s^* tels que $J_{s,k}(X) \ll X^{\eta_s^* + 2s - \frac{k(k+1)}{2} + \epsilon}$. On veut $\eta_s = 0$.

On a majoré η_s en fonction de η_{s-k} et N. Quand $N \to \infty$, on trouve $\eta_s = 0$ si $s \geq k(k-1)$.

Obstacle principal pour une amélioration

$$J_{s,k}(X)$$

$$\leq p^{2s-2k} \max_{1\leq\xi\leq p} \oint |f(\overrightarrow{\alpha})|^{2k} \left| \sum_{\substack{1\leq x\leq X \\ x\equiv\xi[p]}} e(\alpha_1 x + \dots) \right|^{2s-2k}$$

$\rightarrow$ pour $G_{t,k}(X)$, la perte p^{t-r} n'est pas compensée par le gain sur l'intégrale

2) Équivalent via la méthode du cercle

Conjecture (Manin, 1989)

Pour s assez grand, au mieux $s \geq \frac{k(k+1)}{2}$, *on a*

$$J_{s,k}(X) \sim CX^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}$$

où $C > 0$ *est une constante.*

2) Équivalent via la méthode du cercle

Conjecture (Manin, 1989)

Pour s assez grand, au mieux $s \geq \frac{k(k+1)}{2}$, on a

$$J_{s,k}(X) \sim CX^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}$$

où $C > 0$ est une constante.

Théorème (Wooley, 2014)

Si $s \geq k(k-1)+1$, alors il existe $C > 0$ telle que

$$J_{s,k}(X) \sim CX^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Théorème

Si $t \geq 2d_k(d_k - 1) + 1$, *alors*

$$G_{t,k}(X) = RPX^{t-D_k} + O\left(X^{t-D_k-\frac{1}{4d_k^2}}\right) \text{ où}$$

R et P sont des constantes réelles positives ou nulles.

Théorème

Si $t \geq 2d_k(d_k - 1) + 1$, *alors*

$$G_{t,k}(X) = RPX^{t-D_k} + O\left(X^{t-D_k-\frac{1}{4d_k^2}}\right) \text{ où}$$

R et P sont des constantes réelles positives ou nulles.

Proposition

Si $t \geq kd_k + 1$ *et si le système étudié possède une solution réelle non singulière, alors* $R > 0$.

Proposition

Si $t \geq kd_k + d_k + 1$ *et si le système étudié possède pour tout nombre premier p une solution p-adique non singulière, alors* $P > 0$.

Méthode du cercle

Idée : Séparer les $\overrightarrow{\alpha}$ selon leur approximation rationnelle.

Méthode du cercle

Idée : Séparer les $\overrightarrow{\alpha}$ selon leur approximation rationnelle.

$\mathfrak{M}(q,(b_1,\ldots,b_k))$ = arc majeur = $\overrightarrow{\alpha}$ tels que pour tout i, α_i est bien approché par $\frac{b_i}{q}$.

Arcs majeurs : $\mathfrak{M} = \bigsqcup_{q,\overrightarrow{b}} \mathfrak{M}(q,\overrightarrow{b})$.
Arcs mineurs : $\mathfrak{m} = [0,1]^k \setminus \mathfrak{M}$.

$$\oint |f|^{2s} = \underbrace{\int_{\mathfrak{M}} |f|^{2s}}_{\text{terme principal}} + \underbrace{\int_{\mathfrak{m}} |f|^{2s}}_{\text{reste}}$$

Reste : Il faut montrer que $sup_{\mathfrak{m}}|f| \ll X^{1-\delta_k}$ $(\delta_k > 0)$.

Reste : Il faut montrer que $sup_{\mathfrak{m}}|f| \ll X^{1-\delta_k}$ $(\delta_k > 0)$.
$\longrightarrow$ Grand crible + Inégalité de Weyl

Reste : Il faut montrer que $sup_{\mathfrak{m}}|f| \ll X^{1-\delta_k}$ $(\delta_k > 0)$.
$\longrightarrow$ Grand crible + Inégalité de Weyl

$$\int_{\mathfrak{m}} |f|^{2s} \leq \left(sup_{\mathfrak{m}}|f|^2\right) \oint |f|^{2s-2} \ll X^{2-2\delta_k} J_{s-1,k}(X)$$

Reste : Il faut montrer que $sup_{\mathfrak{m}}|f| \ll X^{1-\delta_k}$ $(\delta_k > 0)$.
$\longrightarrow$ Grand crible + Inégalité de Weyl

$$\int_{\mathfrak{m}} |f|^{2s} \leq \left(sup_{\mathfrak{m}}|f|^2\right) \oint |f|^{2s-2} \ll X^{2-2\delta_k} J_{s-1,k}(X)$$

Or $s - 1 \geq k(k-1)$, donc $J_{s-1,k}(X) \ll X^{2s-2-\frac{k(k+1)}{2}+\epsilon}$.

Reste : Il faut montrer que $sup_{\mathfrak{m}}|f| \ll X^{1-\delta_k}$ $(\delta_k > 0)$.
$\longrightarrow$ Grand crible + Inégalité de Weyl

$$\int_{\mathfrak{m}} |f|^{2s} \leq \left(sup_{\mathfrak{m}}|f|^2\right) \oint |f|^{2s-2} \ll X^{2-2\delta_k} J_{s-1,k}(X)$$

Or $s-1 \geq k(k-1)$, donc $J_{s-1,k}(X) \ll X^{2s-2-\frac{k(k+1)}{2}+\epsilon}$.

$$\int_{\mathfrak{m}} |f|^{2s} \ll X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}+\epsilon-2\delta_k} = o\left(X^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}\right)$$

Terme principal :

$$\int_{\mathfrak{M}} |f|^{2s} = \sum_{q,\overrightarrow{b}} \int_{\mathfrak{M}(q,\overrightarrow{b})} |f|^{2s}$$

On remplace $\overrightarrow{\alpha}$ par $\overrightarrow{\beta} + \frac{1}{q}\overrightarrow{b}$.

Terme principal :

$$\int_{\mathfrak{M}} |f|^{2s} = \sum_{q, \overrightarrow{b}} \int_{\mathfrak{M}(q, \overrightarrow{b})} |f|^{2s}$$

On remplace $\overrightarrow{\alpha}$ par $\overrightarrow{\beta} + \frac{1}{q}\overrightarrow{b}$.

Terme en $\frac{1}{q}\overrightarrow{b}$ = équivalent à une constante P

Terme principal :

$$\int_{\mathfrak{M}} |f|^{2s} = \sum_{q,\overrightarrow{b}} \int_{\mathfrak{M}(q,\overrightarrow{b})} |f|^{2s}$$

On remplace $\overrightarrow{\alpha}$ par $\overrightarrow{\beta} + \frac{1}{q}\overrightarrow{b}$.

Terme en $\frac{1}{q}\overrightarrow{b}$ = équivalent à une constante P

$\overrightarrow{\beta}$ est contrôlé par X
$\rightarrow$ changements de variables donne $RX^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}$ avec R constante

Terme principal :

$$\int_{\mathfrak{M}} |f|^{2s} = \sum_{q,\overrightarrow{b}} \int_{\mathfrak{M}(q,\overrightarrow{b})} |f|^{2s}$$

On remplace $\overrightarrow{\alpha}$ par $\overrightarrow{\beta} + \frac{1}{q}\overrightarrow{b}$.

Terme en $\frac{1}{q}\overrightarrow{b}$ = équivalent à une constante P

$\overrightarrow{\beta}$ est contrôlé par X
$\rightarrow$ changements de variables donne $RX^{2s-\frac{k(k+1)}{2}}$ avec R constante

$C = RP$

Obstacle principal pour une amélioration

Majoration asymptotique **mais** adapter les arcs mineurs pourrait améliorer la majoration asymptotique de $sup_{\mathfrak{m}}$.

Améliorations/Généralisations réussies

- *Sans équation de degré* $k-1$*, si* $s \geq k^2 - 3k + 3$ *(*$k \geq 9$*), alors* $J_{s,k}^{[k-1]}(X) \ll X^{2s - \frac{k^2-k+2}{2} + \epsilon}$.
(Wooley, 2014)

Améliorations/Généralisations réussies

• *Sans équation de degré* $k-1$, *si* $s \geq k^2 - 3k + 3$ $(k \geq 9)$, *alors* $J_{s,k}^{[k-1]}(X) \ll X^{2s - \frac{k^2-k+2}{2} + \epsilon}$.
(Wooley, 2014)

• *Pour* $k = 5$, *sans équations de degrés 2 et 4, alors* $J_{4,5}^{[2,4]}(X) \ll X^{4+\epsilon}$.
(Brüdern & Robert, 2012)

Améliorations/Généralisations réussies

• *Sans équation de degré* $k-1$, *si* $s \geq k^2 - 3k + 3$ $(k \geq 9)$, *alors* $J_{s,k}^{[k-1]}(X) \ll X^{2s - \frac{k^2-k+2}{2} + \epsilon}$.
(Wooley, 2014)

• *Pour* $k = 5$, *sans équations de degrés 2 et 4, alors* $J_{4,5}^{[2,4]}(X) \ll X^{4+\epsilon}$.
(Brüdern & Robert, 2012)

• *Système "non singulier" défini par des polynômes homogènes,* $t \geq (D-1)2^D$.
(Browning & Heath-Brown, 2014)

Merci pour votre attention