Primitives et intégrales

19 mars 2014

Introduction

Chercher une primitive et calculer une intégrale n'est pas tout à fait la même chose.

Une **primitive** d'une fonction f, c'est une fonction F qui, lorsqu'on la dérive, nous donne f, c'est-à-dire que $F'=f$. On pourrait aussi dire que c'est l'opération inverse de la dérivation. En pratique, on écrira :

$$F(y) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

où y est la variable de la fonction F, et x est la variable d'intégration.

L'**intégrale** d'une fonction f entre les bornes a et b est un nombre I qui correspond à l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On peut calculer ce nombre en trouvant une primitive F de f. On a alors $I = F(b)-F(a)$. En pratique, on écrira :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

où x est la variable d'intégration.

Remarque : La variable d'intégration x ne peut pas être remplacée par un nombre. Elle parcourt tout l'intervalle $[a, b]$ lorsqu'on calcule une intégrale. On l'appelle *variable muette*. Elle reste figée à l'intérieur de l'intégrale.

Recherche de primitive.

Soit f une fonction. Il n'existe pas qu'une seule primitive F pour f, c'est pour cela que l'on dit que l'on cherche **une** primitive de f. En fait, les primitives de f sont toutes égales à une constante près. Par exemple, pour la fonction $f(y) = 3y^2$, toute primitive s'écrit $F(y) = y^3$+cste.

Pour trouver une primitive non évidente, on va utiliser les mêmes techniques que pour calculer une intégrale (voir partie suivante), car on peut écrire une primitive F de f de la façon suivante :

$$F(y) = \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$$

où a est un nombre fixé qui doit être dans le domaine de définition de f. Ce nombre a peu d'importance, puisqu'il fera apparaître une constante, et que F est définie à une constante près (c'est une primitive). Voici un exemple :

$$F(y) = \int_2^y 3x^2 \mathrm{d}x = [x^3]_2^y = y^3 - 8$$

donc toute primitive de $f(y) = 3y^2$ s'écrit bien $F(y) = y^3$+cste.

Calcul d'intégrales.

On veut calculer :

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Pour calculer l'intégrale, si l'on trouve une primitive de f, c'est terminé. Mais hélas, ce n'est pas toujours si facile. Il existe essentiellement 5 méthodes principales pour calculer des intégrales : la forme composée, l'intégration par parties, le changement de variables, le passage aux complexes et la décomposition en éléments simples. Il arrive souvent que l'on doive mélanger ces techniques. Comme vu ci-avant, ces méthodes peuvent être utilisée pour trouver une primitive de f. Voici ces 5 méthodes détaillées (et comment savoir que l'on doit utiliser telle ou telle méthode) :

La forme composée.

Il arrive que f s'écrive sous la forme $h' \cdot g \circ h$ où g et h sont des fonctions. Si l'on sait facilement trouver une primitive G de g, c'est gagné. En effet, $G \circ h$ est une primitive de $h' \cdot g \circ h$ et alors $I = G(h(b)) - G(h(a))$. Voici deux exemples :

1) Avec $f(x) = 3x^2(1 + x^3)^4$ et $a = 0$, $b = 1$. On a bien $f = h' \cdot g \circ h$ avec $g(x) = x^4$ et $h(x) = 1 + x^3$ car $h'(x) = 3x^2$. On trouve aisément $G(x) = \frac{x^5}{5}$ une primitive de g. Donc $G(h(x)) = \frac{(1+x^3)^5}{5}$ est une primitive de f. Ainsi :

$$\int_0^1 3x^2(1 + x^3)^4 \mathrm{d}x = \left[\frac{(1 + x^3)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{31}{5}.$$

2) Avec $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}\cos(\ln(1 + x^2))$ et $a = 0$, $b = 1$. On a bien $f = h' \cdot g \circ h$ avec $g(x) = \cos(x)$ et $h(x) = \ln(1 + x^2)$ car $h'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On trouve aisément $G(x) = \sin(x)$ une primitive de g. Donc $G(h(x)) = \sin(\ln(1 + x^2))$ est une primitive de f. Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\cos(\ln(1 + x^2))\mathrm{d}x = \left[\sin(\ln(1 + x^2))\right]_0^1 = \sin(\ln(2)) - \sin(\ln(1)) = \sin(\ln(2)).$$

L'intégration par parties.

Il arrive que f s'écrive sous la forme gh' où g et h sont des fonctions. On peut alors utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b g(x)h'(x)\mathrm{d}x = [g(x)h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Il n'est pas toujours intéressant d'utiliser l'intégration par parties. En effet, la formule nous donne une nouvelle intégrale à calculer. Il faut donc que l'intégrale de $g'h$ soit plus facile à calculer que gh'. C'est le cas par exemple quand g est un polynôme et $h'(x) = \exp(cx+d)$, $h'(x) = \cos(cx+d)$, $h'(x) = \sin(cx+d)$, $h'(x) = \mathrm{ch}(cx+d)$ ou $h'(x) = \mathrm{sh}(cx+d)$, Par exemple :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos(7x-1)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sin(7x-1)}{7}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(7x-1)}{7}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x\sin(7x-1)}{7}\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(7x-1)}{49}\right]_0^1 \\ &= \frac{\sin(6)}{7} + \frac{\cos(6)}{49} - \frac{\cos(-1)}{49}.\end{aligned}$$

Il est important de préciser que l'on doit souvent effectuer plusieurs intégrations par parties successives (autant que le degré du polynôme que l'on dérive, par exemple).

Le changement de variables.

Pour réécrire plus simplement l'intégrale, on peut effectuer un changement de variables. La situation classique où cela intervient est lorsque l'on a une fonction *arc* ou *arg*, comme arctan, arccos, arcsin, argth, argch, argsh. Dans ce cas, on effectue le changement de variable correspondant à la fonction, comme $u = \arctan(x)$. Voici un exemple :

1) Avec $f(x) = \arccos(x)$ et $a = -1$, $b = 1$. On effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = \arccos(x) \\ x = \cos(u) \end{cases}.$$

Il est important d'écrire le changement inverse ($x = \cos(u)$) pour pouvoir calculer $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}u$. Pour cela, on dérive la fonction de u (ici *cos*) et on trouve $\mathrm{d}x = -\sin(u)\mathrm{d}u$. On remplace alors $\mathrm{d}x$ par cette nouvelle valeur dans l'intégrale, de même pour $\arccos(x)$ qui est remplacé par u. Attention, les nouvelles bornes sont $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$.

$$\int_\pi^0 \arccos(x)\mathrm{d}x = -\int_\pi^0 u\sin(u)\mathrm{d}u = \int_0^\pi u\sin(u)\mathrm{d}u$$

où on a changé le signe de l'intégrale en changeant l'ordre des bornes d'intégration. Attention, on vérifie bien qu'il n'y a plus du tout de x dans la nouvelle intégrale. On peut finir le calcul en utilisant une intégration par parties (voir partie précédente).

Le passage aux complexes.

Il arrive que f s'écrive sous la forme $\exp(cx+d)\cos(kx+l)$ ou bien $\exp(cx+d)\sin(kx+l)$. Dans ce cas, il faut passer en complexes, c'est-à-dire transformer le *cos* (ou le *sin*) en partie réelle (ou imaginaire) d'une exponentielle complexe. Pour cela, rien ne vaut un exemple :

Avec $f(x) = \exp(x+2)\cos(3x)$ et $a = 0$, $b = \frac{\pi}{3}$. On écrit $\cos(3x) = \Re\mathrm{e}(\exp(3xi))$. Or $\exp(x+2)$ étant toujours un nombre réel, on peut le faire rentrer à l'intérieur de la partie réelle pour obtenir que $\exp(x+2)\cos(3x) = \Re\mathrm{e}(\exp(x+2+3xi))$. Et enfin, **l'intégrale d'une partie réelle est la partie réelle de l'intégrale**. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \exp(x+2)\cos(3x)\mathrm{d}x = \Re\mathrm{e}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \exp(x+2+3xi)\mathrm{d}x\right).$$

On peut calculer l'intégrale dans la partie réelle de manière classique, en utilisant le fait que la dérivée de $x+2+3xi$ est $1+3i$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \exp(x+2+3xi)\mathrm{d}x &= \left[\frac{\exp(x+2+3xi)}{1+3i}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\exp(\frac{\pi}{3}+2+i\pi)}{1+3i} - \frac{\exp(\frac{\pi}{3}+2)}{1+3i} \\
&= \exp(\frac{\pi}{3}+2)\frac{1}{1+3i}(\exp(i\pi)-1) \\
&= \exp(\frac{\pi}{3}+2)\frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)}(-1-1) \\
&= -2\exp(\frac{\pi}{3}+2)\frac{1-3i}{10}
\end{aligned}$$

et la partie réelle de ce dernier résultat est clairement $\frac{-\exp(\frac{\pi}{3}+2)}{5}$. Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \exp(x+2)\cos(3x)\mathrm{d}x = \frac{-\exp(\frac{\pi}{3}+2)}{5}.$$

En remplaçant *cos* par *sin*, et en remplaçant alors la partie réelle par la partie imaginaire, la méthode est exactement la même.

La décomposition en éléments simples.

Lorsque f est une fraction rationnelle ne pouvant pas être gérée par la méthode de la forme composée, et que le numérateur n'est pas la dérivée du dénominateur (car sinon le logarithme du dénominateur est une primitive), on doit recourir à la décomposition en éléments simples (voir TD précédent). Attention, il faut utiliser la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$! ! ! En effet, on ne veut pas se retrouver avec des logarithmes de nombres complexes... Une fois la décomposition effectuée, il ne reste qu'à intégrer chaque termes. Voici un exemple :

Avec $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ et $a = 2$, $b = 3$. Une décomposition en éléments simples nous donne :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

et donc une primitive de f est :

$$\frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right).$$

On peut alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\right]_2^3 \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(10)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(1) - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\ln(5)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5)\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\ln(5)\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln(2).
\end{aligned}$$

Résumé.

Dans quelle situation suis-je ? (listes non exhaustives)

Forme composée : $g' \cdot h \circ g$

Intégration par parties : polynôme $\times$ exponentielle (ou cosinus, sinus, hyperboliques ou non)

Changement de variables : fonction commençant par *arc* ou *arg*

Passage en complexes : $\exp(cx+d)\cos(kx+l)$ ou $\exp(cx+d)\sin(kx+l)$

Décomposition en éléments simples : fraction rationnelle ne pouvant pas être gérée par la méthode de la forme composée et dont le numérateur n'est pas la dérivée du dénominateur