

Offre de contrat doctoral international (Octobre 2022–Septembre 2025)

Directeurs de thèse. [LORENZO BRANDOLESE](#) et [FRANCESCO FANELLI](#)

UMR CNRS d'appartenance: Institut Camille Jordan. Université Lyon 1

Partenaire international. [CLAUDIO MUÑOZ](#)

IRL CNRS d'appartenance: Center for Mathematical Modeling (CMM), Santiago du Chili

Titre de la thèse. *Effets d'un transport irrégulier en mécanique des fluides*

Descriptif du projet de thèse:

Le projet de thèse porte sur l'étude de certains modèles issus de la mécanique des fluides. De façon générale, on cherchera à comprendre les effets d'un transport irrégulier dans la dynamique d'un fluide homogène ou inhomogène.

Le problème de propager des informations par un transport dans un cadre peu régulier est très ancien: on peut mentionner les travaux fondateurs de Di Perna & Lions, Bahouri & Chemin et Ambrosio, et plus récemment les travaux de De Lellis, Danchin, Crippa, Bianchini, Brué... L'interaction et la compétition entre le transport irrégulier et la diffusion ont aussi été un objet d'études dans le passé, par exemple par Danchin et, plus récemment, Le Bris & Lions [9]. Les application de la théorie à des modèles nonlinéaires, notamment ceux issus de la mécanique des fluides, ont été aussi largement considérées, par exemple par Lions [10], Yudovich, Desjardins, Vishik, Crippa... pour le cas du transport, par Fefferman, McCormik, Robinson, Rodrigo, Chemin, Danchin... pour le cas du transport-diffusion.

Malgré ces études, beaucoup de questions restent encore à comprendre. En particulier, au delà des problèmes que pose le cadre peu régulier, d'autres difficultés surgissent dans l'étude du comportement asymptotique en temps long, lorsque l'on ne dispose pas d'assez d'information sur la décroissance de la vitesse de transport.

Dans ce projet de thèse, on s'attaquera à deux problèmes en particulier: d'un côté, on se propose de donner une description rigoureuse de certains phénomènes de concentration qui apparaissent dans les écoulements géophysiques. De l'autre côté, on voudrait comprendre le rôle des effets convectifs sur la dynamique en temps long d'un fluide incompressible. On va maintenant décrire de façon un peu plus approfondie les deux problèmes mentionnés ci-dessus.

Un premier thème sera l'étude de certains phénomènes de concentration dans la dynamique d'un fluide, avec une attention particulière pour le cadre des écoulements géophysiques.

Commençons par donner un exemple du type de phénomènes auxquels on s'intéresse. En première approximation, une tornade peut être vue comme une région limitée et bien définie de l'espace où le tourbillon du fluide est fortement concentré, tandis que le tourbillon est presque absent (voir nul) en dehors de cette région. Étant donné un état initial de la tornade, qu'est-ce qu'on peut dire de sa dynamique? La région de forte concentration du tourbillon va-t-elle augmenter/diminuer de taille, ou aura-t-elle la tendance de rester de taille comparable? De branchements pourront-ils se former et s'éloigner par la suite à partir de la région initiale? S'agissant d'un objet atmosphérique, d'autres questions naturelles se posent: quelle est l'influence de la rotation de la Terre sur la dynamique d'une tornade? Et quel est l'effet de la viscosité du fluide? Comprendre la dynamique de la région de concentration et ses propriétés de stabilité par rapport aux principaux paramètres physiques est le but principal de cette partie du projet de thèse. Si cette question est plutôt bien comprise pour des fluides homogènes (c'est-à-dire à densité constante), voir par exemple [3, 11, 6, 4], elle reste assez peu explorée dans le cadre plus réaliste d'un fluide à densité variable (voir par exemple [7, 5, 8] pour des études reliées).

Cette étude nécessite une compréhension profonde du problème sous plusieurs aspects: caractère bien posé du système initial, estimations uniformes par rapport aux petits paramètres entrant en jeu dans les équations, techniques d'analyse asymptotique pour le passage à la limite, étude du caractère bien posé du système-limite. Une des difficultés majeures de l'étude viendra du type de données considérées. Par exemple, si l'on souhaite modéliser une tornade de la manière la plus simple possible, il convient d'incorporer dans l'analyse des données peu régulières. En effet, les tourbillons auront a priori des sauts à travers de la frontière, lorsque l'on passe de la région de forte concentration à celle de faible concentration. Ce fait, notamment de considérer des données qui puissent être discontinues, pose de défis mathématiques

importants, à cause des nonlinéarités entrant en jeu dans les équations, et fait sortir l'étude proposée du cadre classique

Un autre thème sera la dissipation de l'énergie dans les problèmes de convection pour les fluides incompressibles. Sous l'approximation de Boussinesq, les inconnues du problème se réduisent au champs de vitesse u du fluide et à sa température θ . La vitesse vérifie l'équation de Navier–Stokes $\partial_t u + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p + \vec{g}\theta$, où la température est couplée à u via une équation de transport-diffusion $\partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta$. Dans l'espace tout entier, des conditions nécessaires, a priori inattendues [1], apparaissent lorsque l'on cherche à démontrer que, pour de grands temps, l'énergie du fluide se dissipe à zéro. L'un des buts est de comprendre si ces conditions sont aussi suffisantes.

Par exemple, une stratégie possible pour démontrer que la limite en temps long de l'énergie cinétique totale $\|u(t)\|_2^2$ est nulle serait de ramener le problème à celui du comportement asymptotique de θ , et de démontrer que $\|\theta(t)\|_1 \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$. Des méthodes de type Fourier–Splitting, qui ont déjà prouvé leur efficacité dans des problèmes un peu différents, pourront être convenablement adaptées ici avec un bon espoir de succès.

Ensuite, l'étape suivante serait l'analyse en temps long pour l'équation de transport-diffusion, avec une vitesse donnée. Des résultats précis pour cette équation existent, comme par exemple ceux de Carlen et Loss [2], mais ils exigent tous des conditions trop restrictives sur la décroissance de la vitesse de transport u . Or, dans le cas qui nous intéresse, u est fortement couplée à θ et les estimations usuelles ne fournissent, a priori, aucune décroissance pour la vitesse. Il s'agira alors de chercher à établir des résultats de décroissance en norme L^1 pour des équations diffusives, avec un transport qui est a priori une fonction croissante du temps. Cette question est largement ouverte.

Dans un troisième temps, ce problème pourra traité de manière plus approfondie, dans de directions diverses: ce sera alors l'opportunité de prendre en compte les effets des conditions aux bords, ou de traiter le cas de températures non-intégrables. Il serait intéressant mettre en évidence un cadre dans lequel les solutions restent bornées en norme L^2 , mais sans se dissiper à zéro. Plus généralement, il s'agira de comprendre le rôle des effets convectifs sur le comportement en temps long d'un fluide.

Référent IRL CNRS. C. Muñoz est un expert de l'étude d'équations non-linéaires issues de la physique mathématique. Il s'intéresse à des questions de comportement en temps long des solutions, à la stabilité de certaines solutions particulières, à des phénomènes de concentration d'énergie et d'explosion en temps fini des solutions. Il apporte des compétences complémentaires à celles des encadrants français sur ces questions. Son implication sera très bénéfique pour ce projet de thèse et pour les projets à plus long terme. Grâce à son réseau étendu de collaborateurs, il jouera un rôle important aussi après la thèse, pour l'insertion du doctorant ou de la doctorante dans le monde de la recherche.

Mots-clefs de la classification ERC.

PE1_11 – Theoretical aspects of partial differential equations (primary)

PE1_8 – Analysis (secondary)

Insertion. Le doctorant ou la doctorante sera amené à étudier plusieurs questions d'analyse des EDP: des questions de caractère bien posé du modèle, d'analyse asymptotiques et d'étude de problèmes de perturbation singulière... Il ou elle apprendra à se servir d'outils modernes d'analyse des EDP, comme l'analyse de Fourier et microlocale (théorie de Littlewood-Paley et calcul paradifférentiel), des propriétés fines des solutions aux équations de transport et de transport-diffusion dans un cadre à faible régularité, des techniques de régularité tangentielle à *la Chemin*, des techniques de convergence faible pour les études asymptotiques, etc. Tout cela constituera un bagage solide, lui permettant éventuellement de continuer son parcours dans la recherche et aborder de nouveaux problèmes, par exemple dans le cadre d'un post-doc.

Un aspect importante du projet de thèse est l'insertion du doctorant ou de la doctorante dans les équipes de l'ICJ travaillant sur l'analyse des EDP, mais aussi dans le groupe de recherche se développant autour du projet ANR CRISIS (dont F. Fanelli est le porteur), ainsi que dans de discussions qui ont été entamées par L. Brandolese et F. Fanelli avec les géophysiciens du LGL – Laboratoire de Géologie de Lyon (T. Alboussière, S. Labrosse, Y. Ricard). Cela permettra au doctorant ou à la doctorante d'entrer

en contact avec d'autres chercheurs, d'élargir ses connaissances au delà des thèmes du sujet de thèse et de commencer à construire son propre réseau de recherche.

Rémunération. La rémunération mensuelle est de 2135€ brut mensuel. Des crédits supplémentaires sont prévus pour le financement de la mobilité.

Candidatures. Les candidats et candidates intéressés doivent prendre contact par e-mail, avec L. Brandolese (brandolese@math.univ-lyon1.fr) ou F. Fanelli (fanelli@math.univ-lyon1.fr). Les candidatures sont ouvertes à partir du 17 juin 2022 et seront étudiées au fil de l'eau.

References

- [1] L. Brandolese, M.E. Schonbek, *Large time decay and growth for solutions of a viscous Boussinesq system*, Trans. Amer. Math. Soc. 364, (2012) 5057–5090.
- [2] E. Carlen, Loss, Duke Math., *Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation*. Duke Math. J. (1996) 135–157.
- [3] J.-Y. Chemin: *Persistence de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels*. Ann. Sci. école Norm. Sup. (4), **26** (1993), n. 4, 517-542.
- [4] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier: *“Mathematical geophysics. An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations”*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [5] R. Danchin, X. Zhang: *On the persistence of Hölder regular patches of density for the inhomogeneous Navier-Stokes equations*. J.éc. polytech. Math., **4** (2017), 781-811.
- [6] A. Dutrifoy: *Examples of dispersive effects in non-viscous rotating fluids*. J. Math. Pures Appl. (9), **84** (2005), n. 3, 331-356.
- [7] F. Fanelli: Conservation of geometric structures for non-homogeneous inviscid incompressible fluids. *Comm. Partial Differential Equations*, **37** (2012), n. 9, 1553-1595.
- [8] F. Gancedo, E. García-Juárez: Global regularity for 2D Boussinesq temperature patches with no diffusion. *Ann. PDE*, **3** (2017), n. 2, Art. 14, 34 pp.
- [9] C. Le Bris, P.-L. Lions: *“Parabolic equations with irregular data and related issues – applications to stochastic differential equations”*. De Gruyter, Berlin, 2019.
- [10] P.-L. Lions: *“Mathematical topics in fluid dynamics. Vol. 1: incompressible models”*. Oxford University Press, Oxford, 1996.
- [11] A. J. Majda, A. L. Bertozzi: *“Vorticity and incompressible flow”*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.