Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Topologie : examen du 7 juin 2007 (1ère session) – Durée 3h00

Seul document autorisé : deux feuilles (manuscrites ou imprimées recto-verso) de format A4.
Barème indicatif. Une réponse correctement justifiée et bien redigée : 1 à 3 points.
Une réponse (juste ou non) contenant une faute de raisonnement : 0 à -1 points

Les trois problèmes sont indépendants. Dans chaque problème, les différents exercices peuvent être traités de manière indépendante.

12 points **PROBLEME 1.**

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'un ensemble non vide A vérifie la propriété de la "meilleure approximation" si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \exists y \in A \quad \text{tel que} \quad d(x, y) = d(x, A). \tag{MA}$$

2 **Exercice 1.1.** Montrer que si A vérifie (MA), alors A est fermé.

Exercice 1.2. On se propose de construire un exemple d'un fermé ne vérifiant pas (MA). Soit

$$E = \ell^1 = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\},$$

muni de la norme $\|(x_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. Soit $T \colon \ell^1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$T\big((x_n)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \arctan(n) x_n.$$

3 1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{R})$ et calculer $\|T\|$.

3 2. Soit $A = T^{-1}(\{1\})$. Démontrer que $d(\vec{0}, A) \geq \frac{1}{\|T\|}$, puis que $d(\vec{0}, A) \leq \frac{1}{\|T\|}$. Ici $\vec{0}$ désigne la suite identiquement nulle.

1 3. Montrer que
$$\forall (x_n) \in A, \quad d\big(\vec{0}, (x_n)\big) > d(\vec{0}, A).$$

1 4. Conclure que A est fermé, mais A ne vérifie pas (MA).

2 **Exercice 1.3.** Montrer que si A est un compact de $(E, \|\cdot\|)$, alors A vérifie (MA).
(*Indication :* on pourra utiliser la continuité de la fonction distance).

7 points

PROBLEME 2.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, si $A \subset E$ est non-vide on note

$$\mathrm{co}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C$$

l'enveloppe convexe de A.

Exercice 2.1.

(2) 1. Montrer que $\mathrm{co}(A)$ est convexe.

(2) 2. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, déterminer $\mathrm{co}(\mathbb{N})$ et $\mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}\big)$.

(2) **Exercice 2.2** Dans $E = \mathbb{R}^2$, quelle est l'enveloppe convexe du graphe de la fonction $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $x \mapsto e^{-|x|}$? On se contentera d'une justification graphique. Conclure que

(1)

$$A \text{ fermé} \not\Rightarrow \mathrm{co}(A) \text{ fermé}.$$

6 points

PROBLEME 3

Soit (X, d) un espace métrique *complet*. On rappelle que le diamètre d'un ensemble $A \subset X$ est défini par

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés, non vides, tels que $F_n \supset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) 1. Montrer que si $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

(3) 2. Montrer que si l'on ne suppose plus que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, alors on peut avoir $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$ (*Indication :* on pourra donner un contrexemple dans $X = \mathbb{R}$).

Problème 1

1.1 Soit $A \subset E$. Si $x \in \overline{A}$ on a $d(x,A)=0$

D'après (MA), il existe $y \in A$ tel que $0 = d(x,A) = d(x,y)$, donc $x=y \in A$

Autrement dit : $\overline{A} \subset A$ donc A est fermé.

1.2 Soit $T : \ell^1 \to \mathbb{R}$: $T((x_n)) = \sum_0^\infty \arctan(n)\, x_n$.

1) T est bien définie, car la série c.v. absolument : $\sum_0^\infty |\arctan(n)\, x_n| \leq \frac{\pi}{2} \|(x_n)\|_1 < \infty$.

Il est immédiat que T est une application linéaire, ensuite on a :

$$|T((x_n))| \leq \frac{\pi}{2} \|(x_n)\|_1 \quad \text{, donc} \quad T \in \mathcal{L}(\ell^1, \mathbb{R}) \text{ et } \|T\| \leq \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part : $\|T\| = \sup_{\|(x_n)\|_1 = 1} |T((x_n))|$. On considère les éléments de ℓ^1 de la forme $e_k = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$ $k \in \mathbb{N}$. On a $\|e_k\|_1 = 1$

donc $\|T\| \geq |T(e_k)| = |\arctan(k)|$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Par passage au $\sup_{k \in \mathbb{N}}$ dans cette inégalité, on trouve $\|T\| \geq \frac{\pi}{2}$. Donc $\|T\| = \frac{\pi}{2}$.

2) $A = T^{-1}(\{1\}) = \left\{ (x_n) \in \ell^1 : \sum_0^\infty \arctan(n)\, x_n = 1 \right\}$.

Si $\vec{0} = (0,0,\dots)$, on a : $d(\vec{0}, A) = \inf_{(x_n) \in A} \|\vec{0} - (x_n)\|_1$.

Donc : $d(\vec{0}, A) = \inf_{\sum_0^\infty \arctan(n) x_n = 1} \sum_0^\infty |x_n|$.

Mais : $\sum_0^\infty |x_n| \geq \left| \sum_0^\infty \frac{\arctan(n)}{\frac{\pi}{2}} x_n \right| = \frac{2}{\pi} \Big| \underbrace{\sum_0^\infty \arctan(n)\, x_n}_{=1} \Big| = \frac{2}{\pi}$. $\forall (x_n) \in A$.

donc $d(\vec{0}, A) \geq \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\|T\|}$.

D'autre part : $\frac{e_k}{\arctan(k)} = (0,0,\dots,\frac{1}{\arctan k},0,\dots) \in A$.

Donc $d(\vec{0}, A) \leq d\left(\vec{0}, \frac{e_k}{\arctan(k)}\right) = \frac{1}{|\arctan k|}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. On prend $k \to +\infty$

et on trouve : $d(\vec{0}, A) \leq \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\|T\|}$. Donc $d(\vec{0}, A) = \frac{1}{\|T\|}$

3) Soit $(x_n) \in A$: $d(\vec{0},(x_n)) = \sum_0^\infty |x_n| \geq \left|\sum_0^\infty x_n\right| > \left|\sum_0^\infty \frac{\arctan(n)}{\frac{\pi}{2}} x_n\right|$

$$= \frac{2}{\pi} \underbrace{\left|\sum_0^\infty \arctan(n)\, x_n\right|}_{=1} = \frac{2}{\pi} = d(\vec{0},A)$$

donc : $d(\vec{0},(x_n)) > d(\vec{0},A) \quad \forall (x_n) \in A$.

4) $A = T^{-1}(\{1\})$ est fermé dans ℓ^1 en tant qu'image réciproque d'un fermé à l'aide d'une application continue.

D'après 3), la condition (MA) n'est pas satisfaite

(1.3) Soit $A \subset E$, A compact.

$\forall x \in E$ on définit la fonction : $f_x : A \to \mathbb{R}$

$$f_x(y) = d(x,y).$$

Cette fonction est continue et donc elle possède un minimum absolu sur le compact A (théorème de Weierstrass).

Donc : $\exists\, y_0 \in A$ t.q. $f_x(y) \geq f_x(y_0) \quad \forall y \in A$.

Autrement dit : $\exists\, y_0 \in A$ t.q. $d(x,y) \geq d(x,y_0)$. $\forall y \in A$

Par passage à l'$\inf_{y \in A}$, on trouve : $d(x,A) \geq d(x,y_0)$

Mais $y_0 \in A$ donc $d(x,y_0) \geq d(x,A)$.

On a bien : $d(x,y_0) = d(x,A)$ et A vérifie (MA).

PROBLÈME 2

1

$A \subset E$; $\quad co(A) \overset{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C$

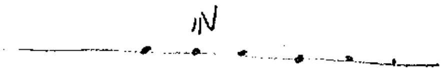
2.1 1) Soient $x, y \in co(A)$. Montrons que le segment $[x,y] \subset co(A)$.

On rappelle que $[x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$.

Si C est convexe et C contient A, alors $x, y \in C$ et donc $[x,y] \subset C$.

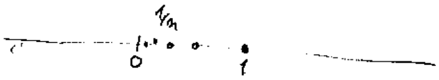
Donc : $[x,y] \subset \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C = co(A)$. Donc $co(A)$ est bien convexe.

2)



$co(\mathbb{N})$ est convexe $\Rightarrow$ connexe dans $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ c'est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'après un théorème du cours.

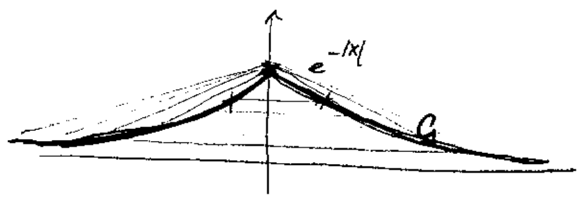
Donc $co(\mathbb{N}) = [0, +\infty)$, parce que $[0, +\infty)$ est bien un convexe, et c'est le plus petit intervalle qui contient $\mathbb{N}$.

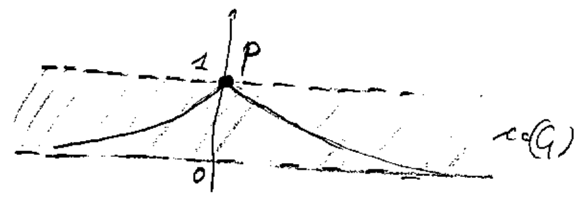


$co\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = (0,1]$.

En effet $co\left(\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$ doit être un intervalle et $(0,1]$ est convexe est c'est le plus petit intervalle qui contient $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2.2





Soit $G = \{(x, e^{-|x|}) : x \in \mathbb{R}\}$.

On a : $co(G) = \mathbb{R} \times (0,1) \cup \{P\}$, où $P = (0,1)$.

Comme $x \mapsto e^{-|x|}$ est une fonction continue, son graphe est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (d'après un résultat vu en TD).

Mais $co(G)$ n'est pas fermé : par exemple $(0,0) \in \overline{co(G)} \setminus co(G)$

Ainsi : G fermé $\not\Rightarrow$ $co(G)$ fermé.

PROBLÈME 3

$F_n \supset F_{n+1}$

$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$.

Comme $F_n \neq \emptyset$, $\forall n \; \exists x_n \in F_n$.

Montrons que (x_n) est de Cauchy : si $n \geq m$ $\begin{cases} x_n \in F_n \subset F_m \\ x_m \in F_m \end{cases}$

donc $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(F_m) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$

Ainsi : (x_n) est de Cauchy et donc (x_n) converge dans (X,d) complet

Soit $x \in X$ tq. $x_n \to x$.

$\forall m \in \mathbb{N}$: $(x_n)_{n \geq m} \subset F_m$, car $F_m \supset F_{m+1} \supset \dots$

Mais $x_n \to x \Rightarrow x \in \overline{F_m} = F_m$ car F_m fermé.

Donc ($m \in \mathbb{N}$ est arbitraire) $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \Rightarrow \bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$

2) Soit $X = \mathbb{R}$; $F_m = [m, +\infty)$. On voit bien que F_m est fermé $\forall m$, $F_m \supset F_{m+1}$ $\forall m$, mais $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \emptyset$

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Examen du 31 mail 2006 – Durée 3 heures

Topologie

Les documents sont autorisés
Barème indicatif. Une réponse correctement justifiée et bien redigée : 1 à 3 points.
Une réponse (juste ou non) contenant une faute de raisonnement : 0 à -1 point.

9 **Exercice 1** Soit $f\colon X \to Y$ une application entre deux espaces métriques. On dit que f est une application propre, si et seulement si elle vérifie :
i) f est continue sur X
ii) $\forall K$ compact de Y, $f^{-1}(K)$ est un compact de X.

1. Les applications suivantes sont-elles propres ?

2 (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(e^t)$.
2 (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$.
1 (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$.

3 2. Soit $f\colon X \to Y$ une application propre. Montrer que si A est un fermé de X, alors $f(A)$ est un fermé de Y.

5 **Exercice 2.** On considère les ensembles de $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 1\}, \qquad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 > 1\}.$$

3 1. Etablir si E est connexe et/ou connexe par arcs.

2 2. Même question pour F.

9 **Exercice 3.** Soit $E = C^1([0,1])$, muni de la norme $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On rappelle que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On défini $T\colon E \to E$, par

$$\forall f \in E\colon \quad T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

3 1. Démontrer que T est lipschitzienne.

2 2. Calculer $T(\mathbb{1})$, puis $T(0)$, où $\mathbb{1}$ est la fonction constante égale à 1, et 0 est la fonction nulle. T est elle une contraction ?

2 3. Pour tout $f \in E$, calculer $(T \circ T)(f)$, puis $\Big((T \circ T)(f)\Big)'$.

1,5 4. En déduire que $T \circ T$ est une contraction sur E.

0,5 5. On note par f l'unique point fixe de $T \circ T$ dans E, qui (d'après un résultat vu en TD) est aussi l'unique point fixe de T.

Conclure qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$ pour tout $x \in [0,1]$.

TSVP

7

Exercice 4. Soient E un espace de Banach et $F \subset E$ un sous espace de E, tel que $\overline{F} = E$. Soit $T \in \mathcal{L}(F, E)$. On se propose de démontrer qu'il existe une unique application $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, E)$, telle que $\forall\, x \in F$, $\widetilde{T}(x) = T(x)$.

2 1. Montrer que si $(x_n) \subset F$ et (x_n) converge dans E, alors $\big(T(x_n)\big)$ converge dans E.

2 2. Montrer que si $x \in E$, $(x_n) \subset F$, $(x'_n) \subset F$ sont deux suites telles que $x_n \to x$ et $x'_n \to x$, alors $\big(T(x_n)\big)$ et $\big(T(x'_n)\big)$ ont la même limite.

2 3. A l'aide des questions précédentes, expliquer comment définir une application $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\forall\, x \in F$, $\widetilde{T}(x) = T(x)$.

1 4. Montrer que si $\widehat{T} \in \mathcal{L}(E, E)$ est une autre application telle que $\forall\, x \in F$, $\widehat{T}(x) = T(x)$, alors $\widehat{T} = \widetilde{T}$.

$\boxed{\text{exercice 1}}$ 1.a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(t) = \cos(e^t)$ On a : $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$,
donc f n'est pas une application propre

1.b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, t^2)$

On a : $f = (f_1, f_2)$; $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) = t$ et
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(t) = t^2$. Comme f_1 et f_2 sont continues, on a
que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est continue.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Alors K est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$.
Donc $f^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Ensuite, $f^{-1}(K)$ est un borné de $\mathbb{R}$,
en effet, sinon on pourrait trouver $(a_n) \subset f^{-1}(K)$ t.q. $(a_n) \to \infty$,
Donc $(a_n, a_n^2) \subset K$ et $(a_n, a_n^2) \to \infty$: absurde.
On conclut que $f^{-1}(K)$ est compact et f est une appl. propre

1.c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $f(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$

On observe que, $\forall t \geq 0$, $\|f(t)\|_2 = e^{-t} \leq 1$,
Donc $f^{-1}(\overline{B}(0,1)) \supset \mathbb{R}^+$ non borné
Alors $f^{-1}(\overline{B}(0,1))$ est non compact. Donc f n'est pas une appl. propre

2) Soit $f : X \to Y$ une appl. propre.

Soit $A \subset X$, A fermé. Soit $y \in \overline{f(A)}$.
Alors $\exists\, (a_n) \subset A$ t.q. $f(a_n) \to y$ dans Y.
On pose $K = \{f(a_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$
D'après un exercice vu en TD, K est un compact de Y.
Donc $f^{-1}(K)$ est un compact de X.
Ensuite, $(a_n) \subset f^{-1}(K)$, donc $\exists\, (a_{n_k})$ extraite de (a_n) t.q. (a_{n_k})
converge. Soit l la limite de (a_{n_k}).

On a $\ell \in A$, car A fermé. En outre, $f(\ell) = f(\lim_{k\to\infty} a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k})$

(où, dans la deuxième égalité on a utilisé la continuité de f).

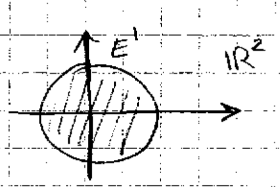
On conclut que $y \in f$.

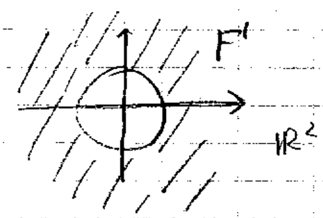
$\boxed{\text{Exercice 2}}$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\}$$
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 > 1\}.$$

On a $E = E' \times \mathbb{R}$, $F = F' \times \mathbb{R}$, où

$E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$; $E' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.





E' et F' sont deux connexes de $\mathbb{R}^2$, d'après un résultat vu en TD. Mais alors E et F sont connexes, en tant que produits de deux espaces connexes (on utilise ici que $\mathbb{R}$ est connexe).

D'autre part, E' et F' sont ouverts dans $\mathbb{R}^2$, et donc E et F sont ouverts dans $\mathbb{R}^3$.

On sait aussi que un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ (et, plus en général, dans un espace de dimension finie) est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

On conclut que E et F sont connexes par arcs.

Exercice 3 $\quad E = C^1([0,1])$.

$f \in E \; ; \; \|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

$T : E \to E$

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

1) T lipschitzienne :

Soit $f, g \in E$

$\forall x \in [0,1]$ on a : $\quad |T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \int_0^x \|f-g\|_\infty \, dt \leq \|f-g\|_\infty$

$$|T(f)'(x) - T(g)'(x)| = |f(x-x^2) - g(x-x^2)| \leq \|f-g\|_\infty$$

Donc $\|T(f) - T(g)\| = \|T(f) - T(g)\|_\infty + \|T(f)' - T(g)'\|_\infty \leq 2\|f-g\|_\infty \leq 2\|f-g\|$.

Donc T est 2-lipschitzienne de E dans E.

2) Soit $c \in \mathbb{R}$: $\quad T(c\mathbb{1})(x) = 1 + \int_0^x c\,dt = 1 + cx$.

$T(0\cdot\mathbb{1})(x) = 1$

Donc : $\quad T(\mathbb{1})(x) - T(0\mathbb{1})(x) = x \quad ; \quad T(\mathbb{1})'(x) - T(0\mathbb{1})'(x) = 1$

$\|T(\mathbb{1}) - T(0\mathbb{1})\| = \|T(\mathbb{1}) - T(0\mathbb{1})\|_\infty + \|T(\mathbb{1})' - T(0\mathbb{1})'\|_\infty = 1+1 = 2$

$= 2\|\mathbb{1} - 0\cdot\mathbb{1}\|_\infty = 2\|\mathbb{1} - 0\cdot\mathbb{1}\|$

Donc "2" est la meilleure constante de lipschitz pour T.

3) Soit $f \in E$.

$$T\circ T(f)(x) = 1 + \int_0^x T(f)(t-t^2)\,dt = 1 + \int_0^x \left[1 + \int_0^{t-t^2} f(s-s^2)\,ds\right] dt$$

$$= 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(s-s^2)\,ds\,dt$$

$$\left(T\circ T(f)\right)'(x) = 1 + \int_0^{x-x^2} f(s-s^2)\,ds$$

Observons que : $\quad x \in [0,1] \implies x - x^2 \in [0, \frac{1}{4}]$

4)

$$\left|(T\circ T)(f)(x) - (T\circ T)(g)(x)\right| \leq \int_0^x \int_0^{t-t^2} \|f-g\|_\infty \, ds\, dt \leq \int_0^1 \int_0^{1/4} \|f-g\|_\infty \, ds\, dt$$

$$\leq \frac{1}{4} \|f-g\|_\infty$$

$$\left|(T\circ T)'(f)(x) - (T\circ T)'(g)(x)\right| \leq \int_0^{x-x^2} \|f-g\|_\infty \, ds \leq \int_0^{1/4} \|f-g\|_\infty \, ds \leq \frac{1}{4} \|f-g\|_\infty$$

Donc $\|T\circ T(f) - T\circ T(g)\| \leq \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f-g\|$

Et $T\circ T$ est une contraction de $(E, \|\cdot\|)$.

5) D'après les résultats du cours, on sait qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que :

$$T(f) = f.$$

Cette fonction vérifie. $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\, dt$

et donc

$$\begin{cases} f'(x) = f(x-x^2) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

Réciproquement, si $f \in E$ vérifie $(*)$, alors,

$$\int_0^x f'(t)\, dt = \int_0^x f(t-t^2)\, dt$$

et donc $f(x) - 1 = \int_0^x f(t-t^2)\, dt$, c'à-d $f = Tf$

Le problème $(*)$ est alors équivalent à $f = Tf$.

Ainsi, $(*)$ possède une solution unique.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ $T : F \subset E \longrightarrow E$

F sous-espace dense de E.

$T \in \mathcal{L}(F, E)$

1) Unicité : Soient $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, E)$; $\hat{T} \in \mathcal{L}(E, E)$ telles que

$\tilde{T}(x) = \hat{T}(x) \quad \forall x \in F.$

Soit $y \in E$ Alors $\exists\, (x_n) \subset F$ t.q. $x_n \to y$.

Donc $\begin{cases} \tilde{T}(x_n) \longrightarrow \tilde{T}(y) \\ \hat{T}(x_n) \longrightarrow \hat{T}(y) \end{cases}$

Mais $\tilde{T}(x_n) = \hat{T}(x_n) = T(x_n)$, donc $\tilde{T}(y) = \hat{T}(y) \quad \forall y \in E$,

c'est à dire : $\tilde{T} = \hat{T}$.

2) Existence :

2a) Soit $x \in E$, $(x_n) \subset F$ t.q. $x_n \to x$

On pose : $\tilde{T}(x) \underset{\text{déf}}{=} \lim_{n \to \infty} T(x_n)$.

Montrons que cette limite existe : en effet : $\|T(x_n) - T(x_m)\|_E \leq \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|x_n - x_m\|$

Mais (x_n) est convergente dans E, donc de Cauchy.

Il s'ensuit que $(T(x_n))$ est de Cauchy dans E, et donc

que $(T(x_n))$ converge

2b) Soit $x \in E$, $(x_n) \subset F$, $(x_n') \subset F$, $\begin{cases} x_n \to x \\ x_n' \to x \end{cases}$

$$\|T(x_n) - T(x_n')\|_E \leq \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|x_n - x_n'\|_E \longrightarrow 0.$$

Or, si $\begin{cases} T(x_n) \to y \\ T(x_n') \to y' \end{cases}$, on a : $\|y - y'\|_E \leq \underbrace{\|y - T(x_n)\|_E}_{\to 0} + \underbrace{\|T(x_n) - T(x_n')\|_E}_{\to 0} + \underbrace{\|T(x_n') - y'\|_E}_{\to 0}$

Donc $y = y'$.

2.c) $\tilde{T}(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} T(x_n)$, où $x \in E$, $(x_n) \subset F$, $x_n \to x$

Cette définition est bien posée d'après 2a) et 2b)

Ensuite $\tilde{T}$ est linéaire :

$\forall x, y \in E$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\tilde{T}(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \lambda y_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[T(x_n) + \lambda T(y_n) \right]$$

$$= \tilde{T}(x) + \lambda \tilde{T}(y)$$

où, dans ce calcul, (x_n) et (y_n) sont deux suites de F t.q. $\begin{cases} x_n \to x \\ y_n \to y \end{cases}$

(et donc $x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y$).

Montrons que $\tilde{T}$ est continue :

$\forall x \in E$: Soit $(x_n) \subset F$ t.q. $x_n \to x$

Alors $\|x_n\|_E \to \|x\|$

En outre, $\|\tilde{T}(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} T(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|$ (continuité de la norme)

Mais $\|T(x_n)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|x_n\| \to \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|x\|$

Donc $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)} \|x\|$

Il s'ensuit que $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)}$.

Il est clair que $\forall x \in F$: $\tilde{T}(x) = T(x)$ parce que on peut prendre la suite $(x_n) = (x, x, x, \dots)$ qui est constante.

Par conséquent : $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(E,E)} = \|T\|_{\mathcal{L}(F,E)}$

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Partiel du 19 avril 2006 – Durée 3 heures

Topologie

Les documents sont autorisés
Barème indicatif. Une réponse correctement justifiée et bien redigée : 1 à 3 points.
Une réponse (juste ou non) contenant une faute de raisonnement : 0 à -1 points.

Question de cours. Soient (X, d) un espace métrique, A et B deux parties non vides de X. On rappelle que

$$\mathrm{d}(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{diam}(A) = \sup_{a,a'\in A} d(a,a').$$

1. Montrer que si A et B sont bornés, alors $A \cup B$ est borné.
2. Que peut-on dire de $\operatorname{diam}(A\cup B)$?

Exercice 1.
Pour tout polynôme à coefficients réels $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on pose $\|P\| = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$. On note par E l'espace $\mathbb{R}[x]$, muni de la norme ci-dessus.

1. Soit $u\colon E \to E$ l'application linéaire qui à tout polynôme P associe le polynôme $u(P) = Q$, où $\frac{dQ}{dx} = P$ et $Q(0) = 0$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, E)$ et calculer $\|u\|$.
2. Soit $v\colon E \to E$ l'application linéaire définie par $v(P) = \frac{dP}{dx}$. L'application v est-elle continue ?
3. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $L_\alpha\colon E \to \mathbb{R}$, l'application linéaire définie par $L(P) = P(\alpha)$.
   Etablir si L_α est continue :
   (a) dans le cas $|\alpha| < 1$, (b) dans le cas $|\alpha| > 1$, (c) dans le cas $\alpha = \pm 1$.

Exercice 2. Soit $\delta \geq 0$. On définit $d\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ par

$$d(i,j) = \delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1} \qquad \text{si } i \neq j$$
$$d(i,i) = 0.$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$. Trouver les réels $\delta \geq 0$ tels que $(\mathbb{N}, d)$ soit un espace métrique complet.

TSVP

Exercice 3. On considère un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, tel que $E \neq \{0\}$.

1. Soit $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose

$$\phi\colon E\backslash\{0\} \to E, \qquad \phi(x) = \frac{\psi(\|x\|)}{\|x\|}\, x$$

   (a) Montrer que ϕ est continue.

   (b) Montrer que si $\psi(0) = 0$, alors on peut prolonger ϕ à une application continue dans E.

   (c) Montrer que si $\psi(0) \neq 0$, alors on ne peut pas prolonger ϕ à une fonction continue dans E.

2. Construire un homéomorphisme $\psi\colon \mathbb{R} \to]-1, 1[$ vérifiant $\psi(0) = 0$.

3. A l'aide des questions 1 et 2, démontrer que E est homéomorphe à la boule unité $B(0, 1)$.

Corrigé du Partiel de Topologie (19 avril 2006)

exercice 1 ① Soit $P \in E$. On doit avoir $\frac{d}{dx}u(P) = P$ et $u(P)(0) = 0$, donc $u(P)(x) = \int_0^x P(t)\,dt$. On observe que $u : E \to E$ est bien définie parce que l'application $x \longmapsto \int_0^x P(t)\,dt$ est une fonction polynômiale.
La linéarité de u est immédiate. Ensuite :

Si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a $u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ donc

$$\|u(P)\|_E = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^2}{(k+1)^2}\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \leq \|P\|_E$$

Donc $u \in \mathcal{L}(E,E)$ et $\|u\| \leq 1$.
D'autre part, soit $\mathbb{1} \in E$ le polynôme constante égal à 1. On a $\|\mathbb{1}\|_E = 1$.
Mais $\|u\| = \sup_{\|P\|_E = 1} \|u(P)\|_E \geq \|u(\mathbb{1})\|_E = 1$,
car $u(\mathbb{1})(x) = x$.

Donc $\|u\| = 1$.

② $v : E \to E$, $\forall P \in E$: $v(P) \overset{\text{déf}}{=} \frac{dP}{dx}$.
Il est immédiat que v est une application linéaire. Montrons que v n'est pas continue. Il suffit de vérifier que : $\nexists\, C > 0$ t.q. $\forall P \in E$: $\|v(P)\|_E \leq C \|P\|_E$.
Soit $P_k(x) = x^k$. On a $\|P_k\|_E = 1$ et $v(P_k)(x) = k\, x^{k-1}$, d'où $\|v(P_k)\|_E = \sqrt{k}$
Mais $\nexists\, C > 0$ t.q. $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt{k} \leq C$, donc $v \notin \mathcal{L}(E,E)$.

③ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $L_\alpha : E \to \mathbb{R}$ t.q. $L_\alpha(P) = P(\alpha)$.
Il est immédiat de vérifier que L_α est une application linéaire. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$|L_\alpha(P)| = |P(\alpha)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha|^{2k}\right)^{1/2} = \|P\|_E \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha|^{2k}\right)^{1/2}.$$

Cette inégalité ne permet pas de conclure que $L_\alpha \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ parce que la "constante" $C = \left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha|^{k}\right)^{1/2}$ dépend de n, et donc de P.

Cependant :

(a) Dans le cas $|\alpha| < 1$, On a, $\left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha|^k\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha|^{2k}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{1-|\alpha|^2}\right)^{1/2}$,

donc $L_\alpha \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\|L_\alpha\| \leq \left(\frac{1}{1-|\alpha|^2}\right)^{1/2}$.

(b) Dans le cas $|\alpha| > 1$, montrons que L_α n'est pas continue.

Soit $P_k(x) = x^k$.

On a : $|L_\alpha(P_k)| = |\alpha^k| = |\alpha|^k \longrightarrow +\infty$ si $k \to +\infty$.

D'autre part, $\|P_k\|_E = 1$ et il s'ensuit que $\nexists C > 0$ t.q. $\forall P \in E$ on a : $|L_\alpha(P)| \leq C \|P\|_E$.

c) Montrons que L_1 et L_{-1} ne sont pas continues.

si $\boxed{\alpha = 1}$: On considère la suite de Polynômes :

$P_k(x) = 1 + x + \dots + x^k$.

On trouve : $\|P_k\|_E = \sqrt{k+1}$ et $|L_1(P_k)| = k+1$.

si $\boxed{\alpha = -1}$ On prend la suite de Polynômes :

$Q_k(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^k x^k$

On obtient : $\|Q_k\|_E = \sqrt{k+1}$ et $|L_{-1}(Q_k)| = k+1$.

Dans les deux cas on conclut que $\sup_{P \neq 0} \frac{|L_\alpha(P)|}{\|P\|_E} = +\infty$,

donc L_1 et L_{-1} ne sont pas continues.

$\boxed{\text{exercice 2}}$ $d : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$; $\delta \geq 0$.

$$d(i,i)=0$$
$$d(i,j) = \delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1} \quad , \text{ si } i\neq j$$

On a : $d(i,i)=0$ et $d(i,j)=d(j,i)$ (immédiat).

ensuite, $\forall i,j,k \in \mathbb{N}$, avec i,j,k distincts

$$d(i,k) = \delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{k+1} \leq \left(\delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1}\right) + \left(\delta + \frac{1}{j+1} + \frac{1}{k+1}\right) = d(i,j) + d(j,k)$$

d'autre part, si au moins deux parmi i,j,k sont égaux, on voit immédiatement que $d(i,k) = d(i,j) + d(j,k)$

et donc l'inégalité triangulaire est valable dans tous les cas

Ceci montre que d est une distance sur $\mathbb{N}$.

$\boxed{1^{er}\text{ cas}}$: $\delta = 0$. Alors la suite $(x_n)_{n\geq 1} = (1,2,3,\dots)$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{N},d)$.

En effet, $\forall n \geq m$: $d(x_n,x_m) \leq \frac{1}{2(m+1)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

D'autre part, (x_n) ne converge pas dans $(\mathbb{N},d)$

En effet, s'il existe $x \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n \to x$, alors $d(x_n,x) \to 0$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$: absurde

Donc $(\mathbb{N},d)$ n'est pas complet si $\delta=0$

$\boxed{2^{ème}\text{ cas}}$ $\delta>0$. Dans cette situation on vérifie que les seules suites de Cauchy sont les suites constantes à partir d'un certain rang.

En effet : Soit $0<\varepsilon<\delta$; Si $x_n \neq x_m$ on a $d(x_n,x_m) > \varepsilon$.

Alors, si (x_n) est de Cauchy, $\exists\, x \in \mathbb{N}$ t.q. $x_n = x$ pour tout n assez grand.

Mais alors $x_n \to x$, et donc $(\mathbb{N},d)$ est complet.

EXERCICE 3

① $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue.

$\phi : E \setminus \{0\} \to E$

$\phi(x) = \dfrac{\psi(\|x\|)}{\|x\|} x$.

(a) Soit $x \neq 0$ et $(x_n) \subset E$, $x_n \to x$. Alors $\|x_n\| \to \|x\|$ (continuité de la norme)
et donc $\lambda_n \equiv \dfrac{\psi(\|x_n\|)}{\|x_n\|} \longrightarrow \dfrac{\psi(\|x\|)}{\|x\|}$. (Continuité de l'application $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\psi(t)}{t}$).

Soit $\lambda = \dfrac{\psi(\|x\|)}{\|x\|}$. On a alors $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{R}$ et $x_n \to x$ dans E.

Alors $\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\| = |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\|$

$\leq C \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \|x\|$

Donc $\phi(x_n) = \lambda_n x_n \to \lambda x = \phi(x)$ dans E, et ϕ est continue sur $E \setminus \{0\}$

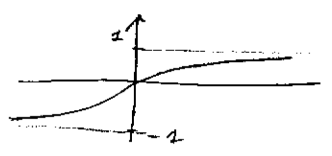
(b) On suppose $\psi(0) = 0$. Posons $\phi(0) = 0$.

Si $x_n \to 0 \Rightarrow \|\phi(x_n)\| = \left\| \dfrac{\psi(\|x_n\|)}{\|x_n\|} x_n \right\| = |\psi(\|x_n\|)| \to 0$

(car $\|x_n\| \to 0$). Donc $\phi(x_n) \to 0 = \phi(0)$ et ϕ est continue en $\{0\}$.

(c) voir ci-après

② $\psi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$



Soit $\psi(t) = \frac{2}{\pi} \arctan(t)$; On a $\psi : \mathbb{R} \to]-1,1[$.

$\psi^{-1} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

$\psi^{-1}(s) = \tan\left(\frac{\pi}{2} s\right)$.

On a bien $\psi \circ \psi^{-1} = Id_{]-1,1[}$ et $\psi^{-1} \circ \psi = Id_{\mathbb{R}}$ et ψ, ψ^{-1} continue

Donc ψ est un homéomorphisme, et $\psi(0) = 0$.

③ Soit $\phi : E \to B(0,1)$

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \dfrac{\arctan(\|x\|)}{\|x\|} \cdot x & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Observons que ϕ est bien défini, car $\|\phi(x)\| < 1 \quad \forall x \in E$.
Ensuite ϕ est continu, d'après ① et ②.
L'application inverse de ϕ est:

$\phi^{-1} : B(0,1) \to E$.

$$\phi^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\|y\|\right)}{\|y\|}\, y & , y \neq 0 \\ 0 , & y = 0. \end{cases}$$

Vérifions, par exemple, que $\phi \circ \phi^{-1}(y) = Id_{B(0,1)}$
On a bien $\phi \circ \phi^{-1}(0) = 0$. Si $y \neq 0$:

$$\phi\left(\phi^{-1}(y)\right) = \frac{2}{\pi}\frac{\arctan\left(\|\phi^{-1}(y)\|\right)}{\|\phi^{-1}(y)\|}\,\phi^{-1}(y) \underset{(*)}{=} \frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}\|y\|}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\|y\|\right)}\,\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\|y\|\right)}{\|y\|}\,y = y$$

(*) en effet: $\|\phi^{-1}(y)\| = \left|\tan\left(\frac{\pi}{2}\|y\|\right)\right| = \tan\left(\frac{\pi}{2}\|y\|\right)$

De même, on a, $\phi \circ \phi^{-1}(x) = x \quad \forall x \in E$
Ensuite, $\phi^{-1} : B(0,1) \to E$ est continue ; ceci se démontre exactement comme pour ϕ, c'est à dire en utilisant ①.

Retour à la question ① c).
On suppose $\psi(0) \neq 0$; $\quad \phi(x) = \dfrac{\psi(\|x\|)}{\|x\|}\, x \quad , x \neq 0$.
Par contradiction, supposons que l'on puisse définir $\phi(0)$ de manière que $\phi : E \to E$ soit continue.
Soit $x \neq 0$ et $\varepsilon > 0$: $\quad \phi(\varepsilon x) = \dfrac{\psi(|\varepsilon|\,\|x\|)}{\|x\|}\, x \underset{\varepsilon \to 0^+}{\Longrightarrow} \phi(0) = \psi(0)\dfrac{x}{\|x\|} \quad \forall x \neq 0$
En remplaçant x avec $-x$ on trouve $\phi(0) = -\psi(0)\dfrac{x}{\|x\|} \Rightarrow 2\phi(0) = 0$

$\Rightarrow 0 = \left\| 2\psi(0)\dfrac{x}{\|x\|} \right\| = 2|\psi(0)|$: absurde.

Question de cours

On rappelle que un ensemble est borné si et seulement si son diamètre est fini.

Montrons que :

$$\operatorname{diam}(A\cup B) \le \underbrace{\operatorname{diam}(A)+\operatorname{diam}(B)}_{<+\infty \text{ car } A,B \text{ bornés}} + \underbrace{d(A,B)}_{<+\infty \text{ car } A,B\neq\emptyset}.$$

Cela implique que $A\cup B$ est borné.

On fixe $\varepsilon>0$. Soient $a\in A$, $b\in B$.
Il existe $\alpha\in A$, $\beta\in B$ tels que $\quad d(\alpha,\beta) < d(A,B)+\varepsilon$

Donc : $$d(a,b) \le d(a,\alpha) + d(\alpha,\beta) + d(\beta,b)$$
$$\le \operatorname{diam}(A) + d(A,B)+\varepsilon + \operatorname{diam}(B).$$

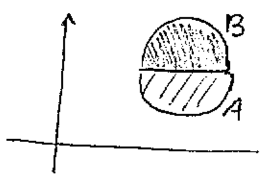
$$\Rightarrow \quad d(a,b) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B) \qquad \forall a\in A,\ b\in B$$

Ensuite : $d(a,a') \le \operatorname{diam}(A) \qquad \forall a,a'\in A$
$d(b,b') \le \operatorname{diam}(B) \qquad \forall b,b'\in B$

Dans tous les cas, on trouve par passage au sup :

$$\operatorname{diam}(A\cup B) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B)$$

Cette inégalité est parfois stricte :
exemple



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

Mais parfois on a une égalité : par exemple si $A=\{a\}$ et $B=\{b\}$.