Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Partiel du 19 avril 2006 – Durée 3 heures

*Topologie*

Les documents sont autorisés
**Barème indicatif.** Une réponse correctement justifiée et bien redigée : 1 à 3 points.
Une réponse (juste ou non) contenant une faute de raisonnement : 0 à -1 point.

**Question de cours.** Soient $(X, d)$ un espace métrique, $A$ et $B$ deux parties non vides de $X$. On rappelle que

$$\mathbf{d}(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{diam}(A) = \sup_{a, a' \in A} d(a, a').$$

1. Montrer que si $A$ et $B$ sont bornés, alors $A \cup B$ est borné.

2. Que peut-on dire de $\operatorname{diam}(A \cup B)$ ?

**Exercice 1.**
Pour tout polynôme à coefficients réels $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$, on pose $\|P\| = \left( \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}$. On note par $E$ l'espace $\mathbb{R}[x]$, muni de la norme ci-dessus.

1. Soit $u \colon E \to E$ l'application linéaire qui à tout polynôme $P$ associe le polynôme $u(P) = Q$, où $\frac{dQ}{dx} = P$ et $Q(0) = 0$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, E)$ et calculer $\|u\|$.

2. Soit $v \colon E \to E$ l'application linéaire définie par $v(P) = \frac{dP}{dx}$. L'application $v$ est-elle continue ?

3. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $L_\alpha \colon E \to \mathbb{R}$, l'application linéaire définie par $L_\alpha(P) = P(\alpha)$.
Etablir si $L_\alpha$ est continue :
(a) dans le cas $|\alpha| < 1$, (b) dans le cas $|\alpha| > 1$, (c) dans le cas $\alpha = \pm 1$.

**Exercice 2.** Soit $\delta \geq 0$. On définit $d \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\begin{aligned} & d(i, j) = \delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1} \qquad \text{si } i \neq j \\ & d(i, i) = 0. \end{aligned}$$

Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{N}$. Trouver les réels $\delta \geq 0$ tels que $(\mathbb{N}, d)$ soit un espace métrique complet.

TSVP

**Exercice 3.** On considère un espace normé $(E, \|\cdot\|)$, tel que $E \neq \{0\}$.

1. Soit $\psi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue. On pose
$$\phi\colon E\backslash\{0\} \to E, \qquad \phi(x) = \tfrac{\psi(\|x\|)}{\|x\|}\, x$$
   (a) Montrer que $\phi$ est continue.
   (b) Montrer que si $\psi(0) = 0$, alors on peut prolonger $\phi$ à une application continue dans $E$.
   (c) Montrer que si $\psi(0) \neq 0$, alors on ne peut pas prolonger $\phi$ à une fonction continue dans $E$.
2. Construire un homéomorphisme $\psi\colon \mathbb{R} \to ]-1, 1[$ vérifiant $\psi(0) = 0$.
3. A l'aide des questions 1 et 2, démontrer que $E$ est homéomorphe à la boule unité $B(0, 1)$.