Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Partiel du 25 avril 2007 – Durée 3 heures

Topologie

Seul document autorisé : une feuille (manuscrite ou imprimée recto-verso) de format A4.
Barème indicatif. Une réponse correctement justifiée et bien redigée : 1 à 3 points.

Une réponse (juste ou non) contenant une faute de raisonnement : 0 points (ou -1 point si la faute a été ajoutée volontairement dans le but de "faire venir le résultat").

Question de cours. Démontrer que, dans un espace métrique (X, d) une partie $A \subset X$ est bornée si et seulement si $\overline{A}$ est bornée.

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés. On note B_E la boule unité fermée de E et on considère une application $u\colon E \to F$ telle que
i) $\forall\, x, y \in E\colon\ u(x+y) = u(x) + u(y)$
ii) $u(B_E)$ est borné dans F.

1. Calculer $u(r\,x)$, pour $x \in E$ et r rationnel.
2. Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $\forall\, x \in E$, $\|u(x)\| \leq M\|x\|$.
3. En déduire que u est continue dans E. Démontrer ensuite que u est une application linéaire.

Exercice 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P à coefficients réels, on pose

$$\|P\| = \sup\big\{\, |P(x)|\colon x \in A\big\}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'application $\|\cdot\|$ soit une norme sur $\mathbb{R}[x]$. Dans le reste de l'exercice on supposera que cette condition est vérifiée.
2. Démontrer que
$$\|P\| = \sup\big\{\, |P(x)|\colon x \in \overline{A}\big\}.$$
3. On considère l'application $\phi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, définie par $\phi(P) = P(0)$. Donner une nouvelle condition nécessaire et suffisante sur A pour que ϕ soit continue.
(*Indication :* considérer des polynômes de la forme $\left(\frac{b^2-x^2}{b^2}\right)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $b = \sup_{a\in A} |a|$.

T.S.V.P.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique *complet*. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés, non vides, tels que $F_n \supset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
   (On rappelle que le diamètre d'un ensemble $A \subset X$ est défini par $\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y)$).

2. Montrer avec un exemple que si l'on ne suppose plus que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, alors on peut avoir $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.