Université Claude Bernard Lyon I
Licence STS troisième année : topologie
Lundi 9 juin 2008

Examen de topologie

Durée : 3H00. Aucun document autorisé

Barème indicatif : 22 points.

Questions de cours

Traiter une *et une seule* des questions suivantes.

1. Montrer que dans un espace métrique toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que tout espace métrique compact est complet.

Exercice 1

Soit (X,d) un espace métrique. On rappelle que $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ est continue. Soit $K\subset X$, $K\neq\emptyset$. On note $\mathrm{diam}(K)\overset{\text{def}}{=}\sup_{x,y\in K} d(x,y)$.

1. Enoncer le théorème de Weierstrass. En déduire que si K est compact, alors le diamètre de K est réalisé, c'est à dire,
$$\exists\, x,y\in K \quad \text{tels que} \quad d(x,y)=\mathrm{diam}(K).$$
2. Soit $A\subset X$ un ensemble non vide. On suppose que
$$\forall\, a,a'\in A,\ \ \text{avec}\ \ a\neq a',\quad \text{on a}\quad d(a,a')\geq 1.$$
Montrer que A est fermé dans X.
3. Dans cette question on prend $(X,d)=(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$, où
$$\ell^\infty=\{(x_n)\subset\mathbb{R}\colon \|(x_n)\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|<\infty\}.$$
Pour $n\in\mathbb{N}$ on note $\vec{e}_n\in\ell^\infty$ la suite $\vec{e}_n=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$. On considère l'ensemble $A\subset\ell^\infty$ défini par
$$A=\Big\{\frac{3n}{n+1}\vec{e}_n : n\in\mathbb{N}\Big\}.$$
   (a) Montrer que A est fermé et borné dans $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ (on pourra se servir du résultat de la question précédente).
   (b) Etablir si le diamètre de A est réalisé. Etablir si A est compact.

T.S.V.P.

Exercice 2

On désigne par $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Pour $f \in E$, on pose

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\Big[1 + \int_0^1 x e^{sx} f(s)\, ds\Big], \qquad x \in [0,1].$$

1. Montrer que l'application $x \mapsto T(f)(x)$ est lipschitzienne dans $[0,1]$. Conclure que $T(t) \in E$.
2. Montrer que $T\colon E \to E$ est une contraction et en déduire qu'il y a une et une seule fonction $\tilde{f} \in E$ telle que
$$\int_0^1 x e^{sx} \tilde{f}(s)\, ds = 2\tilde{f}(x) - 1 \qquad \forall\, x \in [0,1].$$
3. Trouver une constante $R > 0$ telle que $\|\tilde{f}\|_\infty \leq R$.

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $E \neq \{0\}$. Soit $\phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $f\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \phi(\|x\|)$ est uniformément continue si et seulement si ϕ est uniformémement continue dans $\mathbb{R}^+$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^{+,*}$ l'application $f\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^\alpha$ est-elle uniformément continue ?

Corrigé de l'examen de Topologie du 9 juin 2008

Question de cours

1. Soit (X,d) un espace métrique compact. Soit $(x_n) \subset X$ une suite de Cauchy. Alors $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$. On applique ceci avec $\epsilon = 1$. On peut trouver n_0 tel que $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ pour tout $n \geq n_0$. Soit $R = \max_{m=0,\ldots,n_0} d(x_m, x_{n_0})$ et $\tilde{R} = \max\{R, 1\}$. On alors $(x_n) \subset \overline{B}(x_{n_0}, \tilde{R})$. Ceci montre que (x_n) est bornée.
2. Soit (x_n) une suite de Cauchy de X. Comme (X,d) est compact, on peut extraire de (x_n) une suite (x_{n_k}) qui convergente dans X vers un point $x \in X$. Mais alors x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Les propriétés des suites de Cauchy impliquent alors que $x_n \to x$. Cela montre que (X,d) est complet.

Exercice 1

1. Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ définie dans un espace métrique compact possède minimum et maximum absolu : $\exists\, a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf_{x \in X} f(x)$ et $f(b) = \sup_{x \in\ X} f(x)$. On applique ceci à la fonction $d\colon K \times K \to \mathbb{R}$, que l'on sait être continue lorsqu'on munit $K \times K$ de la distance produit. On sait également que $K \times K$ est compact. Il existe alors $b = (x_0, y_0) \in K \times K$ tel que $d(x_0, y_0) = \sup_{x,y \in K} d(x,y) = \operatorname{diam}(K)$.
2. Soit $x \in \overline{A}$. Alors il existe $(a_n) \subset A$ telle que $a_n \to x$. En particulier, (a_n) est de Cauchy, et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_{n_0}, a_n) < 1$ pour tout $n \geq n_0$. Cela implique $a_n = a_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$ et donc $x = a_{n_0} \in A$. Cela montre que A est fermé.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, On pose $\vec{\alpha}_n = \frac{3n}{n+1}\vec{e}_n \in A$. On a $\|\vec{\alpha}_n\|_\infty = \frac{3n}{n+1} < 3$ donc A est borné. Si $n \neq m \in \mathbb{N}$, alors $\|\vec{\alpha}_n - \vec{\alpha}_m\|_\infty = \max\{\frac{3n}{n+1}, \frac{3m}{m+1}\}$.. Cela montre que

$$1 \leq \tfrac{3}{2} \leq \|\vec{\alpha}_n - \vec{\alpha}_m\|_\infty < 3, \qquad n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

   Le résultat de la question 2 implique que A est fermé.

   (b) L'inégalité de droite ci-dessus montre que $\operatorname{diam}(A) \leq 3$. Réciproquement, on note que $\vec{0} = (0, 0\ldots) \in A$. Ainsi, $\operatorname{diam}(A) \geq \|\vec{\alpha}_n - \vec{0}\|_\infty = \|\vec{\alpha}_n\|_\infty$. Mais $\|\vec{\alpha}_n\|_\infty \to 3$ pour $n \to \infty$ et donc $\operatorname{diam}(A) \geq 3$. Cela montre que $\operatorname{diam}(A) = 3$, mais le diamètre de A n'est pas réalisé, comme $(*)$ le montre. Le résultat de la première question implique que A n'est pas compact.

Exercice 2

1. Si $x, x' \in [0,1]$, on a

$$|T(f)(x) - T(f)(x')| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |xe^{sx} - x'e^{sx'}|\,|f(s)|\,ds \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty \int_0^1 |xe^{sx} - x'e^{sx'}|\,ds.$$

   Mais l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction $x \mapsto xe^{sx}$ (où $s \in [0,1]$ est traité comme un paramètre) montre que $|xe^{sx} - x'e^{sx'}| \leq 2e|x - x'|$. Donc $T(f)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne. En particulier, $T(f) \in E$.

2. Si $f, g \in E$, et $x \in [0,1]$, on a

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{sx}|f(s) - g(s)|\, ds \leq \frac{\|f-g\|_\infty}{2}\int_0^1 xe^{sx}\, ds.$$

Donc $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}(e-1)\|f-g\|_\infty$. Comme $e < 3$, le coefficient est inférieur à 1, ce qui assure que $T\colon E \to E$ est une contraction.

Rappelons que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Le théorème des contractions implique qu'il existe une et une seule $\tilde{f} \in E$ telle que $T(\tilde{f}) = \tilde{f}$. Ceci équivaut à

$$\int_0^1 xe^{sx}\tilde{f}(s)\, ds = 2\tilde{f}(x) - 1, \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

3. Supposons $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq R$. Alors

$$\|T(f)\|_\infty \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|f\|_\infty \int_0^1 xe^{sx}\, dx \leq \frac{1}{2} + \frac{R}{2}(e-1).$$

On veut $\|T(f)\|_\infty \leq R$. Ceci sera assuré par l'inégalité ci-dessus dès que $R \geq \frac{1}{3-e}$. Ce calcul montre que $T\colon \overline{B}(0, \frac{1}{3-e}) \to \overline{B}(0, \frac{1}{3-e})$. Mais $\overline{B}(0, \frac{1}{3-e})$ est complet (parce qu'il est fermé de E, qui est complet). Le théorème de point fixe s'applique alors aussi dans $\overline{B}(0, \frac{1}{3-e})$. L'unicité du point fixe dans E assure alors que $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \frac{1}{3-e}$.

Voici une autre méthode : $T(0) = \frac{1}{2}$ (la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$). Donc

$$\|\tilde{f} - \frac{1}{2}\|_\infty = \|T(\tilde{f}) - T(0)\|_\infty \leq \frac{e-1}{2}\|\tilde{f}\|_\infty.$$

D'où, $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|\tilde{f} - \frac{1}{2}\|_\infty + \frac{1}{2} \leq \frac{e-1}{2}\|\tilde{f}\|_\infty + \frac{1}{2}$. On retrouve la même conclusion qu'avant :$\|\tilde{f}\|_\infty \leq \frac{1}{3-e}$.

Exercice 3

1. Si $\phi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors pour $s, t \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |s-t| < \delta \Longrightarrow |\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon. \tag{1}$$

Observons que si $x, y \in E$, on a $\big|\, \|x\| - \|y\|\, \big| \leq \|x-y\|$. On peut alors prendre dans la définition de continuité uniforme pour f (voir ci-dessous) le même $\delta > 0$ pour conclure que $f\colon E \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Réciproquement, si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, on a pour $x, y \in E$:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.q} \quad \|x-y\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{2}$$

Cela est vrai, en particulier, pour $x = sx_0$ et $y = tx_0$, où $s, t \in \mathbb{R}^+$ et $x_0 \in E$ vérifie $\|x_0\| = 1$ (on utilise ici que $E \neq \{0\}$). En remplaçant $f(x) = \phi(\|x\|)$ on trouve (1).

2. Montrons que la fonction : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par $\phi(t) = t^\alpha$ est uniformémement continue si $\alpha \in (0,1]$. En effet elle est continue dans $\mathbb{R}^+$ est donc uniformément continue dans le compact $[0,1]$ (théorème de Heine) ; elle est α-lipschitzienne (et donc uniformément continue) dans $[1,\infty)$, comme on peut le voir à l'aide du théorème des accroissements finis.

Montrons que si $\alpha > 1$, la fonction $\phi(t) = t^\alpha$ n'est pas uniformément continue dans $\mathbb{R}^+$: pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $s, t \in \mathbb{R}^+$, avec $|s-t| < \delta$, tels que $|\phi(s) - \phi(t)| \geq 1$ (poir le voir prendre, par exemple $t = s + \frac{\delta}{2}$ et faire tendre $s \to \infty$. Noter alors que $\phi(s + \frac{\delta}{2}) - \phi(s) \to +\infty$). Cela contredit la definition de continuité uniforme pour ϕ (avec $\epsilon = 1$).

Conclusion : l'application $f(x) = \|x\|^\alpha$ est uniformément continue dans E si et seulement si $0 < \alpha \leq 1$.