Université Claude Bernard Lyon I
Licence STS troisième année : topologie
Mercredi 23 avril 2008

Partiel de topologie

Durée : 2H00.
Aucun document autorisé

Exercice 1

On considère l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer, dans $\mathbb{R}^2$, $\overline{A}$ et $\mathring{A}$, en justifiant rigoureusement vos réponses. En déduire la frontière de A.

Exercice 2

1. Montrer qu'un homéomorphisme $\phi \colon X \to Y$ entre deux espaces topologiques X et Y envoie un ouvert de X dans un ouvert de Y.
2. Démontrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

On note $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques réels et pairs, de degré arbitraire :

$$\mathcal{P} = \Big\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(kx) \colon N \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} \Big\}.$$

On suppose connue l'identité de Fejér, valable pour $x \in (0, 2\pi)$:

$$K_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N+1} \left[\frac{\sin\big((N+1)\frac{x}{2}\big)}{\sin(\frac{x}{2})} \right]^2 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N} \Big(1 - \frac{k}{N+1}\Big) \cos(kx).$$

On introduit les normes sur $\mathcal{P}$,

$$\|f\|_1 = \int_0^\pi |f(x)|\, dx \qquad \text{et} \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,\pi]} |f(x)|.$$

1. Expliquer pourquoi, dans $\mathcal{P}$, $f = 0$ ssi $\|f\|_1 = 0$ et $f = 0$ ssi $\|f\|_\infty = 0$. (On ne demande pas de vérifier les autres axiomes des normes).
2. On considère l'application $T \colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, définie par $T(f) = f(0)$.
   (a) Démontrer que T est linéaire.
   (b) Etablir si $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue et, si c'est le cas, calculer $|||T|||$.
   (c) Etablir si $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ est continue et, si c'est le cas, calculer $|||T|||$.

   (*Indication :* On pourra se servir de la suite K_N)
3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{P}$. (*Indication :* On pourra déduire la réponse de la question précédente, ou répondre directement en utilisant encore la suite K_N).

Corrigé

Exercice 1. $A = A_1 \backslash A_2$, où $A_1 = \overline{B}((0,0), \sqrt{2})$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$ et $A_2 = B((1,0),1)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Donc $A = A_1 \cap A_2^c$ est fermé et $\overline{A} = A$. Ensuite,

$$A^\circ = (A_1 \cap A_2^c)^\circ = A_1^\circ \cap (A_2^c)^\circ = B((0,0), \sqrt{2}) \cap (\overline{A}_2)^c = B((0,0), \sqrt{2}) \cap \overline{B}((1,0),1)^c.$$

Dans les deux derniéres égalités on a utilisé que dans un e.v.n. l'intérieur de la boule fermée est la boule ouverte, et l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée (on rappelle que cette propriété n'est pas toujours vraie dans un espace métrique). On en déduit que

$$\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

consiste en deux cercles.

Exercice 2.

1. Soit $\phi \colon X \to Y$ un homéomorphisme et U un ouvert de X. On a $\phi(U) = (\phi^{-1})^{-1}(U)$ car ϕ est bijective. Mais $\phi^{-1} \colon Y \to X$ est continue, donc $\phi(U)$ est ouvert dans Y.
2. Rappelons que les singletons sont des ouverts dans $\mathbb{Z}$, mais ne sont pas des ouverts dans $\mathbb{Q}$ (avec la topologie usuelle). Par contradiction, s'il existe un homéomorphisme $\phi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, si $m \in \mathbb{N}$, alors $\phi(\{m\})$ serait un singleton ouvert dans $\mathbb{Q}$, d'après la première question. Absurde.

Exercice 3

1. Il est immédiat que $f = 0$ implique $\|f\|_1 = 0$ et $\|f\|_\infty = 0$. Réciproquement, si $f \in \mathcal{P}$ et $\|f\|_1 = 0$, alors $f(x) = 0$ dans $[0\pi]$ parce que f est continue. Ensuite $f(x) = 0$ dans $[-\pi, \pi]$ parce que f est paire et alors $f = 0$ dans $\mathbb{R}$ parce que f est 2π-périodique. On montre de la même manière que $\|f\|_\infty = 0$ implique $f = 0$.
2. La linérité de T est laissé au lecteur. On considére $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{P}$, on a $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$. Donc $|||T||| \leq 1$. D'autre part $\mathbf{1}$ (le polynôme constante égale à 1) appartient à $\mathcal{P}$ et $|T(\mathbf{1})| = 1$ donc $|||T||| \geq 1$. On considère $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$. On a

   $$|T(K_N)| = |K_N(0)| = N + 1$$

   (d'après la premiére égalité qui définit K_N, et en faisant tendre $x \to 0^+$). D'autre part,

   $$\|K_N\|_1 = \int_0^\pi |K_N(x)|\,dx = \int_0^\pi K_N(x)\,dx$$

   (en effet, la première égalité de K_N montre que $K_N \geq 0$). En utilisant maintenant la deuxième égalité de K_N, et en observant que $\int_0^\pi \cos(kx)\,dx = 0$ pour $k = 1, \ldots, N$, on obtient, $\|K_N\|_1 = \pi$. Si $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ était continue, on aurait

   $$|||T||| = \sup_{f \in \mathcal{P}, f \neq 0} \frac{|T(f)|}{\|f\|_1} \geq \frac{|T(K_N)|}{\|K_N\|_1} = \frac{N+1}{\pi}, \qquad \forall\, N \in \mathbb{N}^*.$$

   Autrement dit, $|||T||| = +\infty$. Cela montre que $T \colon (\mathcal{P}, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$ n'est pas continue.