

Examen de Topologie du 9 juin 2010

Durée: 3 heures

Seul document autorisé : deux feuilles (manuscrites ou imprimées) recto-verso

Exercice 1

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On introduit les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$$

et

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

1. Démontrer que A est ouvert et B est fermé.
2. Démontrer que C est ouvert et D est fermé
3. Comparer, au sens de l'inclusion, A avec B° et $\overline{A}$ avec B . Chercher des contre-exemples pour les inclusions fausses.
4. Comparer $\overline{C}$ avec D et C avec D° .

Exercice 2

Soit X un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2 . On suppose que:

$$\forall (x_n) \subset X : x_n \xrightarrow{d_1} x \implies x_n \xrightarrow{d_2} x \quad \text{et que} \quad (X, d_1) \text{ est compact}$$

1. Démontrer que si F est un fermé dans (X, d_2) , alors F est fermé aussi dans (X, d_1) . (On pourra utiliser la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites).
2. Démontrer que (X, d_2) est compact.
3. Démontrer que si F est un fermé dans (X, d_1) , alors F est fermé aussi dans (X, d_2) . Conclure que d_1 et d_2 définissent la même topologie.

T.S.V.P.

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $B: E \times E \rightarrow E$ une application bilinéaire et continue. On rappelle qu'alors

$$\exists C_0 > 0, \forall x, y \in E: \|B(x, y)\| \leq C_0 \|x\| \|y\|.$$

Soit $a \in E$ tel que $\|a\| < \frac{1}{4C_0}$. On se propose de démontrer que l'équation

$$x = a + B(x, x) \tag{*}$$

possède une solution $x \in E$.

1. Justifier l'identité $B(x, x) - B(y, y) = \frac{1}{2}[B(x - y, x + y) + B(x + y, x - y)]$.

En déduire que l'application $x \mapsto a + B(x, x)$ est lipschitzienne dans toute boule $\{x \in E: \|x\| \leq r\}$ et préciser une constante de Lipschitz pour ϕ .

2. Résoudre l'inégalité $C_0 r^2 - r + \|a\| \leq 0$. Trouver ensuite $0 < r_1 < r_2$ tels que $\forall r \in [r_1, r_2]$ on a

$$\|x\|_E \leq r \implies \|a + B(x, x)\| \leq r.$$

3. Trouver un $r > 0$ tel que ϕ soit une contraction dans la boule $\{x \in E: \|x\| \leq r\}$.
4. En déduire que l'équation (*) possède une solution $x \in E$. Cette solution est-elle unique ?

Exercice 4

1. Ecrire la définition de suite de Cauchy dans un espace métrique (X, d) .
2. Soit $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, où $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}}}$. La suite (f_n) est-elle de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
3. Cette suite est-elle de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 |f(x)| dx$?

Exercice 1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$
 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$.

1) $A = f^{-1}([0, +\infty[) \Rightarrow A$ ouvert.
 $B = f^{-1}([0, +\infty]) \Rightarrow B$ fermé.

2) Démontrons que D est fermé : soit $(x, y) \in \bar{D} \Rightarrow \exists (x_n, y_n) \subset D$ t.q.
 $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$.

On a : $\begin{cases} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{cases}$ et $\begin{cases} f(x_n) \rightarrow f(x) \\ y_n \geq f(x_n) \end{cases}$

En prenant $n \rightarrow \infty$ dans cette inégalité on trouve $y \geq f(x) \Rightarrow (x, y) \in D$.
 Donc D est fermé.

On démontre de la même manière que l'ensemble $C^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ est fermé. Mais alors C est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

3) On a $A \subset B$ et A ouvert. Donc $A \subset \overset{\circ}{B}$.
 On a $A \subset B$ et B fermé. Donc $\bar{A} \subset B$.

Soit f la fonction constante égale à zéro. Dans ce cas, $A = \emptyset \subsetneq \overset{\circ}{B} = \mathbb{R}$.
 et $\bar{A} = \emptyset \subsetneq B = \mathbb{R}$

4) On a C ouvert et $C \subset D \Rightarrow C \subset \overset{\circ}{D}$.

Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D} \Rightarrow \exists \varepsilon_0, \exists_{\mathbb{R}^2} (x_0, y_0), \varepsilon) \subset D$.

$\Rightarrow]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset D \Rightarrow y_0 - \frac{\varepsilon}{2} \geq f(x_0) \Rightarrow y_0 > f(x_0)$
 $\Rightarrow (x_0, y_0) \in C$. Donc $C = \overset{\circ}{D}$.

On prouve de la même manière que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}^{\circ} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$
 c'est à dire. $(C^c)^{\circ} = D^c$. Mais alors : $(\bar{C})^c = D^c$ et
 donc $\bar{C} = D$.

exercice 2

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \implies x_n \xrightarrow{d_2} x.$$

1) Soit F fermé dans (X, d_2) . Alors F est fermé dans (X, d_1) .

Soit $x \in \overline{F}^{d_1}$. Alors $\exists (x_n) \subset F$ t.q. $x_n \xrightarrow{d_1} x$
 Hyp. $\implies x_n \xrightarrow{d_2} x$ et $(x_n) \subset F$. Donc $x \in \overline{F}^{d_2} = F$

Mais alors $\overline{F}^{d_2} \subset F$, c'est-à-dire F est fermé dans (X, d_2) .

2) On suppose (X, d_2) compact.

Soit $(x_n) \subset X$. On peut extraire une suite (x_{n_k}) t.q. $\exists x \in X$
 t.q. $x_{n_k} \xrightarrow{d_1} x$. Mais alors $x_{n_k} \xrightarrow{d_2} x$. Donc (X, d_2) est compact.

3) Soit F fermé dans (X, d_1) alors F est compact dans (X, d_1)
 (puisque fermé dans un compact). On montre alors comme au point 2)
 que F est compact dans (X, d_2) .

Mais alors F est fermé dans (X, d_2) .

En conclusion: F fermé dans $(X, d_1) \iff F$ fermé dans (X, d_2) .

Pour passage au complémentaire on a: M ouvert de $(X, d_1) \iff M$ ouvert de (X, d_2) ,
 c'est-à-dire, d_1 et d_2 définissent la même topologie.

Exercice 3 Soit $B: E \times E \rightarrow E$ bilinéaire, t.q.

$$\exists C_0: \|B(x,y)\| \leq C_0 \|x\| \|y\| \quad \forall x,y \in E.$$

Soit $a \in E$ t.q. $\|a\| < \frac{1}{4C_0}$.

(a)
$$\frac{1}{2} [B(x-y, x+y) + B(x+y, x-y)] = \frac{1}{2} [2B(x,x) - B(y,x) + B(x,y) - 2B(y,y) - B(x,y) + B(y,x)]$$

$$= B(x,x) - B(y,y).$$

(b) Soit $\|x\| \leq \pi$.

$$\|a + B(x,x)\| \leq \|a\| + \|B(x,x)\| \leq \|a\| + C_0 \|x\|^2 \leq \|a\| + C_0 \pi^2 \stackrel{?}{\leq} \pi$$

la dernière inégalité équivaut à $C_0 \pi^2 - \pi + \|a\| \leq 0$

Ceci est vérifié lorsque $\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2$, où :

$$\pi_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_0 \|a\|}}{2C_0} \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4C_0 \|a\|}}{2C_0}.$$

suite de (a)
$$\|\phi(x) - \phi(y)\| = \|B(x,x) - B(y,y)\| \leq \frac{1}{2} C_0 \|x-y\| (2\|x+y\|)$$

$$\leq C_0 (\|x\| + \|y\|) \|x-y\|.$$

Si $x,y \in \{x: \|x\| \leq \pi\}$ on a :

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq 2\pi C_0 \|x-y\|.$$

Donc ϕ est $2\pi C_0$ lipschitzienne sur la boule $\{x: \|x\| \leq \pi\}$.

(c) d'après (b):

$\forall \pi$ t.q. $\pi_1 \leq \pi \leq \pi_2$:

$$\phi: \{x: \|x\| \leq \pi\} \rightarrow \{x: \|x\| \leq \pi\}.$$

Soit π t.q.

$$\pi_1 \leq \pi < \frac{1}{2C_0}$$

(un tel π existe car $\|a\| < \frac{1}{4C_0}$)

On a alors : que ϕ est une contraction dans la boule fermée $\{x: \|x\| \leq \pi\}$

(d) Comme $\{x: \|x\| \leq \pi\}$ est complet (car fermé dans E qui est complet), ϕ possède un et un seul point fixe : $\exists! x_0$ t.q. $\|x_0\| \leq \pi$ et $\phi(x_0) = x_0$.
 x_0 est solution de $(*)$. R n'y a pas unicité de solution dans E (en général).

Exercice 4. (8d) métrique

(a) $(x_n) \subset X$ est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

(b) $(f_n) \subset E$, où $E = C([0,1], \mathbb{R})$, $\| \cdot \|_E = \| \cdot \|_\infty$.

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}}$$

On sait que E est complet avec $\| \cdot \|_\infty$.

Donc (f_n) de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$ si (f_n) converge dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

Or, $\nexists f \in E$ t.q. $f_n \xrightarrow{\| \cdot \|_\infty} f$, en effet, si ce n'est,

on aurait $f_n(0) \rightarrow f(0)$

ce qui est absurde, car $f_n(0) = n \rightarrow \infty$.

Donc (f_n) n'est pas de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, soit $n \geq m \geq 1$.

$$\| f_n - f_m \|_1 = \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{m}} \right| dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{m}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}{(\sqrt{x} + \frac{1}{n})(\sqrt{x} + \frac{1}{m})} dx$$

$$\leq \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \int_0^1 \frac{1}{x + \frac{1}{mn}} dx = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \left[\log \left(1 + \frac{1}{mn} \right) - \log \left(\frac{1}{mn} \right) \right]$$

$$= \frac{n-m}{nm} \log(1+mn)$$

$$\leq C \frac{n-m}{(nm)^{3/2}} \leq \frac{2m}{(nm)^{3/2}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} \cdot m^{3/2}} < \frac{2}{m^{3/2}} \quad \text{ici, } C \text{ est indep de } m, n.$$

Donc $\exists n_0$ t.q. $\forall n \geq m \geq n_0$ on a $\| f_n - f_m \|_1 < \varepsilon$.

La suite est de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_1)$