1 Topologies, distances, normes

1.1 Topologie, distances, intérieur et adhérence

Exercice 1. Montrer que dans un espace topologique la réunion infinie de fermés n'est pas toujours un fermé. Montrer que l'intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.
(*Indication* : on pourra considérer des suites d'intervalles de $\mathbb{R}$ bien choisies).

Exercice 2. Démontrer que l'intersection de topologies sur un ensemble X est une topologie sur X. En déduire que si $\mathcal{S}$ est une collection de parties de X, on peut construire la plus petite topologie contenant $\mathcal{S}$ (ou topologie "engendrée par $\mathcal{S}$").

Exercice 3. Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ les trois topologies sur $\mathbb{R}$ définies comme ceci :

1. $\mathcal{T}_1$ est la topologie engendrée par les intervalles de la forme $]a, b[$, avec $a < b$.
2. $\mathcal{T}_2$ est la topologie engendrée par les intervalles de la forme $[a, b[$, avec $a < b$.
3. $\mathcal{T}_3$ est la topologie engendrée par les intervalles de la forme $[a, b]$, avec $a < b$.

Comparer (au sens de l'inclusion) ces trois topologies. Les comparer aussi avec la topologie eucldienne et la topologie discrète sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit X un ensemble non vide, muni de la topologie co-finie (les ouverts sont $\emptyset$, X et les ensembles dont le complémentaire est fini). Donner une c.n.s. pour que cette topologie soit séparée.

Exercice 5. Donner une c.n.s. sur $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour que la fonction $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ définisse une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application croissante vérifiant pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$, $\phi(u) = 0$ ssi $u = 0$ et $\phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$.

Soit (X, d) un espace métrique. Pour $x, y \in E$, on pose $\delta(x, y) = \phi[d(x, y)]$. Montrer que δ est une distance sur X.

Exercice 7. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X :

1. Comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i$, $\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}^{\circ}$ d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i$, $\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}^{\circ}$ d'autre part.
2. Comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$ d'autre part.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}_*^+$. On pose $r = \inf_{n\in\mathbb{N}} r_n$, $R = \sup_{n\in\mathbb{N}} r_n$ et on fixe $a \in X$. Expliciter à l'aide de r et R :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a, r_n) \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(a, r_n).$$

Exercice 9.
1. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie euclidienne. Calculer l'intérieur et l'adhérence de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$
2. Construire une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les ensembles suivants soient distincts : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$.

1.2 Normes

Exercice 10. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.

Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et décrire, pour chacune d'elles, les boules dans le cas $n = 2$.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel normé et A,B deux parties non vides de E, on pose $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que si B est un ouvert alors $A + B$ est un ouvert.

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Justifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E. Pour $f \in E$ et $\varepsilon > 0$, représenter graphiquement $B(f, \varepsilon)$.
2. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
3. Soit $A = \{f \in E;\ f(x) > 0\ \forall x \in [0, 1]\}$. Montrer que A est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$.
4. Montrer que A n'est pas ouvert pour $\|\cdot\|_1$.
5. Soit $B = \{f \in E;\ \exists x \in [0, 1],\ f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé. Si C est une partie non vide de E, on dit que C est convexe si pour tout $x, y \in C$ et tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in C$. Montrer que les boules de E sont convexes.

Exercice 14. Soient (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X. On note $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A. On rappelle que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$ et que $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$. Montrer à l'aide d'exemples que ces inclusions peuvent être strictes.
2. Montrer que si A est une partie de X à la fois ouverte et fermée alors $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.
3. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.
4. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cap B) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

1.3 Suites. Adhérence d'une partie d'un espace métrique.

Exercice 15. Soit dans un espace métrique une suite (x_n) telle que les trois suites extraites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite elle-même converge.

Exercice 16. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites réelles :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{et} \qquad x_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \qquad \text{avec } m, n \geq 1.$$

Exercice 17. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X et $x \in X$. On rappelle que $d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$. Montrer que $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

Exercice 18. Soient E un espace vectoriel normé, r un nombre réel, $r > 0$ et $a \in E$. On rappelle que $B(a, r) = \{x \in E\colon \|x - a\| < r\}$ et $\overline{B}(a, r) = \{x \in E\colon \|x - a\| \leq r\}$.

1. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ coïncide avec $\bar{B}(a, r)$
2. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\bar{B}(a, r)$ coïncide avec $B(a, r)$.

3. En utilisant la distance discrète, démontrer qu'en général, dans un espace métrique, on peut avoir $\overline{B(a,r)} \neq \overline{B}(a,r)$.

Exercice 19. On considère un espace métrique (X,d), un ouvert A de X et une partie quelconque B de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas un ouvert.

Exercice 20. Soient (X,d) un espace métrique, A un ouvert de X et B une partie de X tels que $\overline{A} = X$ et $\overline{B} = X$, montrer que $\overline{A \cap B} = X$.

1.4 Distances et normes équivalentes

Exercice 21. Démontrer que dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 22. Si $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $\|P\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$ et $\|P\|_\infty = \max\{|a_1|, ..., |a_n|\}$. On montre comme dans l'exercice 10 que ce sont trois normes sur $\mathbb{R}[X]$. Ces normes sont-elles équivalentes?

Exercice 23. Montrer que[1] $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$, topologiquement équivalente à la distance euclidienne. Démontrer que d n'est pas métriquement équivalente à la distance euclidienne.

Exercice 24.
1. Soient d et δ deux distances métriquement équivalentes sur X. Montrer que d et δ donnent les mêmes ouverts.
2. Soit (X,d) un espace métrique et $\delta = \dfrac{d}{1+d}$. Montrer néanmoins que d et δ sont topoloquement équivalentes. Les distances d et δ sont-elles métriquement équivalentes ? (Distinguer le deux cas : (i) d est une distance non bornée. (ii) d est une distance bornée).

Exercice 25. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_\alpha$ et $\|\cdot\|_\beta$. On note respectivement par $B_\alpha(x,r)$ e $B_\beta(x,r)$ les boules ouvertes de centre x et rayon $r > 0$ pour ces deux normes.

1. Pour tout $C > 0$, montrer que $\|\cdot\|_\alpha \leq C\|\cdot\|_\beta$ ssi $B_\beta(0,1) \subseteq B_\alpha(0,C)$.
2. Conclure que $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont deux normes équivalentes si et seulement si elles induisent la même topologie.

Exercice 26. Démontrer que, dans l'espace $E = C([0,1],\mathbb{R})$, les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ introduites dans l'exercice 12 ne sont pas équivalentes.

1.5 Sous-espaces topologiques

Exercice 27. Soit $X = \{x \in \mathbb{R} \colon \sin(x) > 0\}$. On munit X de la distance euclidienne : $d(x,y) = |x-y|$. On considère le sous-ensemble de X, $A =]0,\pi[$. Etablir si A est ouvert dans (X,d). Etablir si A est fermé dans X.

Exercice 28. On munit $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ de la topologie euclidienne. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Le singleton $\{m\}$ est-il fermé dans $\mathbb{Z}$? Et dans $\mathbb{Q}$? Le singleton $\{m\}$ est-il ouvert dans $\mathbb{Z}$? Et dans $\mathbb{Q}$?

1.6 Inégalités classiques

Exercice 29. Pour $1 < p < \infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on définit $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $1 < p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Fixons $1 < p, q < \infty$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

[1] On pourra appliquer l'exercice 6.

1. (**Inégalité de Young**) Si $a, b \geq 0$ alors $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. (Indication : étudier le minimum de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - xb$ pour $x \geq 0$.)

2. (**Inégalité d'Hölder**) Si $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \|a\|_p \|b\|_q \left(= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}\right).$$

   Indication: montrer d'abord l'inégalité pour la cas $\|a\|_p = \|b\|_q = 1$.

3. (**Inégalité de Minkowski**) Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

   Indication: montrer en utilisant l'inégalité d'Hölder que

$$\sum_{i=1}^n |a_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \|a\|_p \|a + b\|_p^{p-1}$$

   et

$$\sum_{i=1}^n |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \leq \|b\|_p \|a + b\|_p^{p-1}.$$

   Conclure en sommant ces deux inégalités.

2 Continuité

2.1 Continuité des fonctions entre espaces topologiques

Exercice 30. Soient $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue.

a) Montrer que $\forall A \subset X$, $\forall B \subset Y$, on a

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \quad f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}, \quad f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset (f^{-1}(B))^{\circ}.$$

b) Montrer sur des exemples que les inclusions précédentes peuvent être strictes.

c) Peut-on comparer $f(\overset{\circ}{A})$ et $(f(A))^{\circ}$?

d) On suppose que f est continue et surjective et A dense dans X. Montrer que $f(A)$ est dense dans Y.

Exercice 31. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice de A, χ_A, soit continue. On rappelle que χ_A est définie par

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 32. Soient (E, d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue;

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E : f(x) < a\}$ et $\{x \in E : f(x) > a\}$ sont des ouverts de E;

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ et $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ sont des fermés de E.

b) Lorsque f est continue et A une partie quelconque de E, montrer que

$$\inf_A f = \inf_{\overline{A}} f, \qquad \sup_A f = \sup_{\overline{A}} f.$$

On pourra considérer l'ensemble $B = \{x \in E : f(x) \geq \inf_A f\}$.

c) Une identité analogue est-elle valable lorsqu'on remplace $\overline{A}$ par $\overset{\circ}{A}$?

Exercice 33. Soit (E, d) un espace métrique. On rappelle que la distance à une partie A de E est la fonction

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \qquad (x \in E).$$

a) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne (i.e. qu'elle vérifie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \qquad \forall x, y \in E).$$

b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.

c) En déduire que si F et G sont deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, \ G \subset V, \ U \cap V = \emptyset.$$

Exercice 34. Soient E, F deux espaces métriques et $f, g : E \to F$ deux applications continues.

a) Montrer que $\Delta = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que si A est dense dans E et si $f \equiv g$ sur A, alors $f \equiv g$ sur E.

c) Montrer que $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.

d) Est ce que la réciproque est vraie? i.e., est-ce que

$$\Gamma_f \text{ fermé } \implies f \text{ continue?}$$

Indication : on pourra considérer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2.2 Continuité des applications linéaires entre e.v.n.

Exercice 35. Soit $n \geq 1$ et $X = \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour $a = (a_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\begin{array}{llll} T_a : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} & \\ & x & \longmapsto T_a(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, & \text{si } x = (x_k)_{1\leq k\leq n}. \end{array}$$

a) Vérifier que T_a est une application linéaire continue sur X.

b) Calculer sa norme.

Exercice 36. (Une application linéaire discontinue) Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$. Pour $f \in E$, muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Pour $c \in [a, b]$, on considère

$$\begin{array}{lll} \delta_c : & E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto f(c). \end{array}$$

Montrer que δ_c est une application linéaire sur E non continue.

Exercice 37. Pour $f \in E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

a) Soit $\mu : E \to E$ définit par

$$\mu(f)(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \qquad x \in [0, 1],\ f \in E.$$

(i) Montrer que μ est bien définit et que μ est une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans lui même.

(ii) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définit par

$$f_n(t) = n(1 - t)^{n-1}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.

(iii) En déduire la norme de μ.

b) Refaire l'exercice, en munissant E de la norme de la convergence uniforme.

Exercice 38. On définit sur $C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, la forme linéaire

$$\Lambda(u) := \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt\,, \qquad u \in C([0,1],\mathbb{R}).$$

a) Montrer que Λ est une forme linéaire continue sur $C([0,1],\mathbb{R})$ et que $\|\Lambda\| \leq 1$.

b) Montrer que $\|\Lambda\| = 1$.
__Indication__ : on pourra calculer, pour $n \geq 3$, $\Lambda(u_n)$, avec u_n définit par

$$u_n := \begin{cases} 1 & \text{sur } \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ -1 & \text{sur } \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \\ \text{affine et continue} & \text{sur } \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Exercice 39. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ une suite strictement croissante et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| < +\infty$. On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et $T : E \to \mathbb{R}$ défini par

$$T(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n f(a_n).$$

a) Montrer que T est bien définie.

b) Montrer que T est une forme linéaire continue sur E.

c) Montrer que

$$\|T\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|.$$

2.3 Continuité uniforme. Convergence uniforme

Exercice 40. Soient f, g les fonctions : $[1,\infty[\to [1,\infty[$ définies par $f(t) = t^{1/2}$ et $g(t) = t^2$. Ces fonctions sont-elles uniformément continues ?

Exercice 41. Pour tout entier $n \geq 0$, soit f_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(t) = \frac{t}{n+t}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle mais que la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 42. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n, & \text{si } x \leq n \\ 0, & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,+\infty[$.

2.4 Homéomorphismes

Exercice 43. Construire des homémorphismes entre :

1. Deux intervalles de la forme $[a,b]$ et $[c,d]$, avec $a < b$ et $c < d$.
2. L'intervalle $]-1,1[$ et $\mathbb{R}$
3. Un cercle privé d'un point et $\mathbb{R}$
4. Le cylindre $S^1 \times [0,1]$ et la couronne $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice 44. Démontrer que si X et Y sont deux espaces topologiques homéomorphes, et $x_0 \in X$, alors il existe $y_0 \in Y$ tel que $X \backslash \{x_0\}$ est homéomorphe à $Y \backslash \{y_0\}$.

En déduire qu'il n'y a pas d'homéomorphisme entre l'intervalle $[0,1[$ et l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 45. Etablir si l'application $f\colon [0,2\pi[\to S^1$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est un homéomorphisme.

Exercice 46. a) Soit X un espace métrique et d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont équivalentes, alors l'application identité

$$id : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

est un homéomorphisme.

b) On considère $X = \mathbb{R}$ et $d_1(x,y) := |\arctan x - \arctan y|$, $d_2(x,y) := |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathbb{R}, d_1)$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}, d_2)$, mais que d_1 et d_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 47. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. Montrer que l'application $\varphi : X \to X$ défini par

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est un homéomorphisme de $B_{\|\cdot\|_1}(0,1)$ sur $B_{\|\cdot\|_2}(0,1)$.

En prenant $E = \mathbb{R}^2$, déduire de ce qui précède qu'un carré est homéomorphe à un disque.

3 Espaces métriques complets

3.1 Suites de Cauchy et espaces complets

Exercice 48. Etablir si les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$ sont complets : $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $]0,1]$, $[0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$.

Exercice 49.

1. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme uniforme, n'est pas complet.
2. Montrer que $C^1([0,1])$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est complet.
3. Montrer que $C([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, n'est pas complet.

Exercice 50. On note $\ell^1 = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R} \colon \|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty \}$ et $\ell^\infty = \{x = (x_n) \colon \|x\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n |x_n| < \infty\}$. Montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$, mais que $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 51. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Soit $A = B(0,1)$. On considère deux distances sur A : la distance d_1 induite par la norme euclidienne et $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 + \left| \frac{1}{d_1(x,A^c)} - \frac{1}{d_1(y,A^c)} \right|$.

1. Vérifier que d_2 est une distance.
2. Montrer que $\mathrm{id} \colon (A, d_1) \to (A, d_2)$ est un homéomorphisme.
3. Montrer que (A, d_1) n'est pas complet.
4. Montrer que (A, d_2) est complet. Conclusion ?

Exercice 52. Soit $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \colon \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

1. Montrer que $c_0 \subset \ell^\infty$.
2. Montrer que c_0 est un espace de Banach.

Exercice 53. Soit (X,d) un espace métrique complet. On construit une suite $A_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ telle que $A_{n+1} \subset A_n$ et $r_n \to 0$.

1. Montrer que (x_n) est une suite de Cauchy.
2. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, montrer que $\{x\} = \cap_n A_n$.

Exercice 54. Soit $\phi\colon (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ un homémorphisme linéaire (ou “isomorphisme”) entre les espaces vectoriels normés E et F. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si F est un espace de Banach.

Exercice 55. Soit $E = C(]0,1[)$. Pour $n \geq 2$ et $f, g \in E$, soit

$$d_n(f,g) = \sup_{x\in[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]} |f(x) - g(x)|.$$

1. Si $D_n(f,g) = \dfrac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)}$, montrer que D_n vérifie l'inégalité triangulaire.
2. Soit $d(f,g) = \sum_{n\geq 2} \frac{D_n(f,g)}{2^n}$. Montrer que d est une distance sur E.
3. (Plus difficile). Montrer que (E, d) est complet.

3.2 Contractions et points fixes

Exercice 56. Soient (X, d) un espace métrique complet, $f\colon X \to X$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $f^k = f\circ\cdots\circ f$ (k fois) est contractante. Montrer que f a exactement un point fixe.

Exercice 57. On munit $C([0,1])$ et $C([0,1]^2)$ de la norme uniforme. Si $f \in C([0,1])$ et $K \in C([0,1]^2)$, on pose

$$Tf(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\, dy, \qquad x \in [0,1].$$

On admet que $Tf \in C([0,1])$.

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}\big(C([0,1])\big)$.
2. (Plus difficile). Montrer que, pour $k \geq 1$, on a $\|T^k\| \leq \dfrac{\|K\|_\infty^k}{k!}$.
3. (Plus difficile). Montrer que, pour tout $g \in C([0,1])$ l'équation $Tf = f + g$ a exactement une solution.

Exercice 58. 1. Démontrer qu'une fonction $x = x(t)$ est solution du problème $(*)$ si et seulement si $x = x(t)$ est solution du problème $(**)$:

$$(*) \begin{cases} x \in C^1([-1,1], \mathbb{R}) \\ x'(t) = \dfrac{1}{2}\sin(x(t)) \quad \forall t \in [-1,1] \\ x(0) = 1. \end{cases} \qquad\qquad (**) \begin{cases} x \in C([-1,1], \mathbb{R}) \\ x(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t \sin(x(s))\, ds \quad \forall t \in [-1,1] \end{cases}$$

2. Soit $E = C([-1,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Définir une contraction $\phi\colon E \to E$ telle que x_0 est un point fixe pour ϕ si et seulement si x_0 est solution de $(**)$. Conclure que le problème $(*)$ possède une et une seule solution.

Exercice 59. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n$, $n \geq 0$. On veut montrer le résultat suivant : *il existe un unique choix de* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $(x_n) \subset [10, 11]$

1. Montrer que $Y = \{\, (y_n) \in \ell^\infty \colon (y_n) \subset [10,11] \,\}$, muni de la distance $d\big((y_n), (y'_n)\big) = \sup_n |y_n - y'_n|$ est complet.
2. Soit $F((y_n)) = (z_n)$, où $z_n = \sqrt{100 + y_{n+1} - \sin n}$. Montrer que $F\colon Y \to Y$ est bien définie et contractante.
3. Conclure.

Exercice 60. Soient $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leq 5\}$. Trouver un ensemble (aussi grand que possible) de paramètres (α, β) tels que le système

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha(1 + e^{x-5} + \cos y) \\ y = 3 + \beta(e^{x-5} - \sin y) \end{cases}$$

ait exactement une solution dans A.
(*Indication :* On pourra chercher une application contractante $\phi\colon (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_1)$ où $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$).

Exercice 61. Soit ℓ^p ($p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$) l'espace vectoriel des suites $(x_n) \subset \mathbb{R}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ converge. On rappelle que l'on peut normer ℓ^p par $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est complet.

Exercice 62. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels, muni de la norme

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On note U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Si $A \in U$, montrer que

$$B(A, \|A^{-1}\|^{-1}) \subset U.$$

4 Espaces compacts

Exercice 63. Montrer que $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 64. Soit X un ensemble muni de la distance discrète d (i.e. $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ sinon). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (X, d) soit compact.

Exercice 65. Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique (X, d). Montrer que $K \cup L$ est un compact.

Exercice 66. Construire un recouvrement ouvert de $]0,1[$ à partir duquel on ne peut extraire de sousrecouvrement fini. Retrouver le fait que $]0,1[$ n'est pas compact.

Exercice 67. Soient n et m deux entiers strictement positifs, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$.

1. Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
2. Enoncer et montrer la réciproque de ce résultat.

Exercice 68. Soient K un compact et F un fermé d'un espace métrique (X, d) tels que $F \cap K = \emptyset$. Soit $d(K, F) = \inf\{d(x,y) : x \in K, y \in F\}$.

1. Montrer que $d(K, F) > 0$.
2. Montrer que si l'on suppose que F est compact, alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que $d(x,y) = d(K,F)$.

Exercice 69. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$.

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
3. Montrer que si A et B sont fermés, cela n'implique pas que $A + B$ soit fermé.

Exercice 70. Soient K_n ($n \in \mathbb{N}$) et K des compacts d'un espace métrique (X, d) tels que

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n = K \text{ et pour tout entier } n \in \mathbb{N},\ K_{n+1} \subset K_n.$$

Soit U un ouvert de (X, d) tel que $K \subset U$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 71. Soient U et V deux ouverts et K un compact d'un espace métrique (X, d). On suppose que $U \cap V = \emptyset$ et $K \subset U \cup V$. Montrer que $U \cap K$ et $V \cap K$ sont compacts.

Exercice 72. Soit (K, d) un espace métrique compact et soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions réelles continues sur K telles que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur K. Soit $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = \max_{x\in K} f_n(x)$.

1. Montrer que $f_n(x_n)$ est décroissante.
2. Démontrer que $f_n(x_n) \to 0$. Conclure que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur K.

Exercice 73. Soient (K, d) un espace métrique compact et $f : K \to K$ une fonction telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ si $x, y \in K$ et $x \neq y$.

1. Montrer que f a au plus un point fixe.
2. Montrer qu'il existe un élément $a \in K$ tel que $d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$ pour tout $x \in K$.
3. Montrer que a est le point fixe de f.
4. Pour $x_0 \in X$, on définit $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(d(x_n, a))_{n\geq 0}$ converge vers une limite $l \geq 0$.
5. Montrer que $l = 0$. Conclusion ?

Exercice 74. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$.

1. Montrer que f est bornée.
2. La fonction f atteint-elle ses bornes ?
3. Montrer que f atteint au moins l'une de ses bornes.

Exercice 75. Soient A et B deux parties convexes de $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que le plus petit ensemble convexe contenant la fois A et B est $C = \{(1-\lambda)a + \lambda b\colon a \in A, b \in B, \lambda \in [0, 1]\}$.
2. Montrer que si A et B sont compacts alors C est compact.

Exercice 76. Soit n un entier strictement positif et soit C un ensemble convexe et compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Pour $\epsilon > 0$, on pose $C_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, C) \leq \epsilon\}$.

1. Montrer que $C_\epsilon = C + \overline{B}(0, \epsilon)$.
2. En déduire que C_ϵ est encore un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 77. Soit n un entier strictement positif et soit F une partie fermée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$ où d est la distance induite par $\|\cdot\|$.

5 Espaces connexes

Exercice 78. Soit (X,d) un espace métrique et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces connexes de X. On suppose que $\forall\, n \geq 0$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est connexe.

Exercice 79. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (1-x^2) < |y| < 2(1-x^2)\}$. Démontrer que A n'est pas connexe. Trouver deux points $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tel que $A \cup \{P\}$ et $A \cap \{Q\}$ soient connexes. Conclure qu'en général l'intersection de connexes n'est pas connexe.

Exercice 80. Soit A une partie non vide, ouverte et fermée dans un espace métrique (X,d). Soit $a \in A$ et $\mathcal{C}_a$ la composante connexe de X contenant a. Montrer que $\mathcal{C}_a \subset A$. En déduire que tout ensemble $A \subset X$ qui non est vide, ouvert, fermé et connexe est une composante connexe de X.

Exercice 81. Quelles sont les composantes connexes de l'espace $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\}$? Observer qu'une composante connexe de X est toujours fermée, mais pas toujours ouverte dans X.

Exercice 82. Soit $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \colon x^2+y^2 = R\}$, où $R > 0$. Montrer que E présente deux composantes connexes, $E_1 = \{(x,y) \colon x^2+y^2 < R\}$ et $E_2 = \{(x,y) \colon x^2+y^2 > R\}$.

Exercice 83. Lesquels des ensembles suivants sont connexes ? (i) $\mathbb{R}^2$ privé d'un point. (ii) $\mathbb{R}^2$ privé d'une droite. (iii) $\mathbb{R}^3$ privé d'un point. (iv) $\mathbb{R}^3$ privé d'une droite. (v) $\mathbb{R}^3$ privé d'un plan.

Exercice 84. Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, si $A \subset E$ est non vide on note

$$\mathrm{co}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ C \supset A}} C$$

l'enveloppe convexe de A.

1. Montrer que $\mathrm{co}(A)$ est convexe.
2. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, déterminer $\mathrm{co}(\mathbb{N})$ et $\mathrm{co}\big(\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}^*\}\big)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, quelle est l'enveloppe convexe du graphe de la fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $x \mapsto e^{-|x|}$? On se contentera d'une justification graphique. Conclure que

$$A \text{ fermé} \not\Rightarrow \mathrm{co}(A) \text{ fermé}.$$

Exercice 85. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f^{-1}(\{a\})$ est borné, alors il existe $R > 0$ tel que $f(B(0,R)^c) \subset]-\infty, a[$, ou $f(B(0,R)^c) \subset]a, \infty[$. (*Indication :* utiliser que $B(0,R)^c$ est connexe).
2. En déduire que si $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et surjective, alors $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est non-borné. (*Indication :* utiliser que $\overline{B}(0,R)$ est compact dans $\mathbb{R}^2$).

Exercice 86. On dit qu'un espace métrique (X,d) vérifie la propriété du point fixe (PF), si toute fonction $f \in C(X,X)$ a au moins un point fixe dans X.

1. Montrer que, dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0,1]$ vérifie (PF).
2. Montrer que si X et Y sont deux espaces métriques homéomorphes, alors X vérifie (PF) si et seulement si Y vérifie (PF).
3. Montrer que si X vérifie (PF), alors X est connexe.

Exercice 87. Soit $R > 0$. Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension ≥ 2, la sphère $S(0,R)$ est connexe par arcs. En déduire que $B(0,R)^c$ et $E \backslash \{0\}$ sont connexes par arcs.