Université Claude Bernard Lyon 1 - Année 2007-08

License de Mathématiques - Topologie

Partiel

Le 30 octobre 2007, 10h00–12h00.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice.
Soit E un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 2. Pour $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$.

1. Montrer que d est une distance.
2. Montrer que tout singleton de E est à la fois ouvert et fermé dans E.
3. Soit $x_0 \in E$. Comparer les ensembles suivants :
   (a) la boule ouverte $B(x_0, 1)$,
   (b) la boule fermé $\bar{B}(x_0, 1)$,
   (c) l'adhérence $\overline{B(x_0, 1)}$ de la boule ouverte $B(x_0, 1)$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice.
Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, on considèrele le sous-ensemble $D = \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$. Soit $\delta = \sqrt{2} - 1$.

1. Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \delta^n < b - a$ puis qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a < m\delta^n < b$.
2. Que peut-on en conclure sur D ?

Exercice.
Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie euclidienne, déterminer l'adhérence de l'ensemble suivant :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1; y = \sin(\frac{1}{x})\}.$$

Exercice.
Soit $A \subset X$ une partie d'un espace topologique non-vide. On rappelle que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ est la frontière de A.

1. Montrer que $x \in \mathrm{Fr}(A)$ si et seulement si pour tout voisinage V de x on a $V \cap A \neq \emptyset$ et $V \cap A^c \neq \emptyset$.
2. Déterminer $\mathrm{Fr}(A)$ en cas que A est un ensemble fini et X est un espace de Hausdorff.
3. Donner l'exemple d'une topologie sur X tel que $\mathrm{Fr}(A) = \emptyset$ pour toute partie $A \subset X$.
4. Donner l'exemple d'une topologie sur X tel que $\mathrm{Fr}(A) = X$ pour toute partie $A \subset X$.
5. Soit $f : Y \to X$ une fonction continue entre deux espaces topologiques et $A \subset X$. Montrer que $\mathrm{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\mathrm{Fr}(A))$. Montrer à l'aide d'un exemple que l'inclusion peut être stricte.
6. Soit $X = C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeur réelle muni de la topologie normique $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Déterminer la frontière de $A = \{f \in C([0,1]) | f(0) > 0\}$.