

ANALYSE M1R. TRAVAUX DIRIGÉS.

1 Applications du lemme de Zorn aux espaces vectoriels de dimension infinie

Exercice 1.1 (Révision des relations d'ordre) Soit l'ensemble $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, muni de la relation d'ordre définie par

$$a \leq b \leq c \leq d, \quad e \leq b, \quad e \leq f, \quad c \leq g.$$

1. Représenter graphiquement cette relation d'ordre. S est-il totalement ordonné ? Quels sont les éléments maximaux dans (S, \leq) ? Etablir si'il existe $\max S$.
2. On considère les ensembles $E_1 = \{a, b, e\}$, $E_2 = \{b, f\}$ et $E_3 = \{a, e\}$. Etablir si E_j est majoré et trouver tous ses majorants. En déduire, s'ils existent, $\max E_j$ et $\sup E_j$ pour $j = 1, 2, 3$.

Exercice 1.2 Soit S un ensemble ordonné. On dit que S est *inductif* si toute partie totalement ordonnée de S est majorée.

1. L'ensemble S de l'exercice 1.1 est-il inductif ?
2. Donner une c.n.s. pour qu'un ensemble *totalement ordonné* soit inductif.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie. Soit \mathcal{S} l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E . Montrer que \mathcal{S} , muni de la relation d'inclusion, est inductif.

Lemme de Zorn. *Soit S un ensemble ordonné non vide et inductif. Alors S possède un élément maximal.*

Exercice 1.3

1. Soit \mathcal{S} l'ensemble des tous les systèmes libres d'un espace vectoriel E . Montrer que \mathcal{S} , muni de la relation d'inclusion, est inductif.
2. Conclure que tout espace vectoriel (non-trivial) possède une base. Soit E un espace vectoriel et $(y_i)_{i \in I}$ un système libre de E . Montrer qu'il existe une base de E contenant $(y_i)_{i \in I}$. (Ces bases sont parfois appelées "bases algébriques" ou "bases linéaires" pour les distinguer des bases orthonormées dans les Hilbert, des bases de Schauder dans les Banach etc., qui sont de nature différente).
3. (Bases de Hamel, ou bases de \mathbb{R} sur \mathbb{Q}) En déduire qu'il existe une famille de réels $(\alpha_i)_{i \in I}$ telle que tout réel s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $(x_i)_{i \in I}$.

Exercice 1.4 Soit V un sous-espace d'un espace vectoriel E (de dimension finie ou infinie). Montrer que V possède un supplémentaire algébrique, c'-à-d, $\exists W \subset E$, W espace vectoriel, tel que $V \cap W = \emptyset$ et $E = V + W$.

Exercice 1.5 Soit E un espace vectoriel réel normé de dimension infinie. Montrer que l'on peut construire sur E une forme linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ non continue.

Indication : Montrer qu'il existe une suite infinie $(e_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs unitaires libres de E et considérer f définie par $f(e_n) = n$.

2 Le théorème de Baire

Définition. On dit qu'un espace topologique E est un **espace de Baire** si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E .

Théorème de Baire. *Un espace métrique complet est un espace de Baire.*

Exercice 2.1

1. Soit $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. X est-il de Baire ? Et l'intervalle $[0, 1]$? Et \mathbb{Q} ?

Exercice 2.2 Soit E un espace topologique

- Montrer que E est un espace de Baire si et seulement si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide dans E .
- Montrer qu'une partie A d'un espace de Baire E est maigre si et seulement si $E \setminus A$ est un résiduel.
- Soit E un espace de Baire et $(F_n)_{n \geq 1}$ une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n \geq 1} F_n = E$. Montrer que $\bigcup_{n \geq 1} \overset{\circ}{F}_n$ est un ouvert dense dans E .

Définition :

Soient E un espace topologique de Baire et A une partie de E .

- On dit que A est **maigre** (ou **Baire-négligeable**) si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides.

- Si une propriété est satisfaite en tout point de E sauf éventuellement dans un ensemble Baire-négligeable, on dit qu'elle est valable **Baire-presque partout**.

- On dit que A est un **résiduel** si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E .

Exercice 2.3 On veut montrer qu'un résiduel de \mathbb{R} peut être de mesure de Lebesgue nulle. Soit $\phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ une bijection. On pose $U_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(\phi(n), \frac{1}{2^{n+j}})$, où $j \in \mathbb{N}$. Poser $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_j$ et conclure.

Exercice 2.4 Donner des exemples d'espaces vectoriels munis d'une base algébrique dénombrable. En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'on ne peut pas mettre de norme de Banach sur ces espaces.

Exercice 2.5 Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose que (E, d) est complet. On considère une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications continues de E dans F , convergeant simplement vers une application $f : E \rightarrow F$.

- a) Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \{x \in E : \forall p \geq n, \delta(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense dans E (on pourra utiliser l'exercice 2.2.c) et que

$$\forall x_0 \in \Omega_\varepsilon, \exists V \text{ voisinage de } x_0 \text{ tel que } \delta(f(x_0), f(x)) \leq 3\varepsilon \text{ dans } V.$$

- En déduire que l'ensemble de continuité de f est un résiduel. Ainsi, f est continue presque partout (au sens de Baire).
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur \mathbb{R} . Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 2.6 On note \mathcal{C} le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R} , muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble

$$U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in \mathcal{C} \mid \forall x \in I, \exists y \in I \text{ avec } 0 < |y - x| < \varepsilon \text{ tq } \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n \right\}.$$

- Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est un ouvert de \mathcal{C} .
- Montrer que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans \mathcal{C} (indication : pour $f \in \mathcal{C}$, pour $\delta > 0$, on considérera la fonction $x \rightarrow f(x) + \delta \sin(Nx)$ avec N bien choisi).
- En déduire que l'ensemble des fonctions de \mathcal{C} nulle part dérivables est un résiduel dans \mathcal{C} .

3 Construction de Topologies

Exercice 3.1 (Prébase d'une topologie) Soit X un ensemble, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ un recouvrement de X . On note \mathcal{B} l'ensemble des intersections finies d'éléments de \mathcal{S} et \mathcal{T} l'ensemble des réunions (finies ou infinies) d'éléments de \mathcal{B} .

1. Montrer que \mathcal{T} est une topologie : *la topologie la moins fine contenant \mathcal{S}* .
(Terminologie : on dit que \mathcal{S} est une prébase, ou sous-base, pour \mathcal{T} et que \mathcal{B} est une base pour \mathcal{T}).
2. Soit $X = \mathbb{R}$ et \mathcal{S} la collection de tous les intervalles de la forme $] - \infty, a[$ ou $]b, \infty[$. Caractériser la topologie engendrée par la prébase \mathcal{S} .

Exercice 3.2 Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une collection d'espaces topologiques. On se donne des applications $f_i : X \rightarrow Y_i$. On munit X de la topologie \mathcal{T} la *moins fine* telle que toutes les applications $f_i, i \in I$ soient continues.

Soit $W \xrightarrow{g} X$ une application entre un espace topologique W et X (muni de la topologie \mathcal{T} ci-dessus). Montrer que g est continue ssi $f_i \circ g : W \rightarrow Y_i$ est continue pour tout $i \in I$.

Rappel (topologie produit). Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une collections d'espace topologiques. On note $X = \prod_{i \in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i\}$ l'espace produit. On note $p_i : X \rightarrow X_i$ la projection sur X_i définie par : $(x_i)_{i \in I} \xrightarrow{p_i} x_i$. La topologie produit \mathcal{T} sur X est la topologie la moins fine telle que toutes les projections sont continues.

Exercice 3.3 Soit $X = \{(x_1, x_2, \dots)\}$ l'espaces des suites réelles. On peut écrire $X = \prod_{\mathbb{N}^*} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On pose

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{U_1 \times U_2 \times \dots \text{ tels que } U_n \text{ est ouvert de } \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* \}$$

1. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est la base d'une topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ sur X . Comparer $\tilde{\mathcal{T}}$ avec la topologie produit \mathcal{T} sur X .
2. Soit $K = \{(x_1, x_2, \dots) : x_n \in [-1, 1] \forall n\}$. K est-il compact dans (X, \mathcal{T}) ? Et dans $(X, \tilde{\mathcal{T}})$?

Exercice 3.4 (continuité dans un produit) Soit $W \xrightarrow{g} X$ une application entre un espace topologique W et $X = \prod_{i \in I} X_i$. On suppose X muni de la topologie produit. Montrer que g est continue si et seulement si toutes les composantes $g_i : W \rightarrow X_i$ sont continues.

Exercice 3.5 (convergence dans un produit)

1. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, une collection d'espaces topologiques. On munit $X = \prod_{i \in I} X_i$ de la topologie produit. Soit $f \in X$ et (f_n) une suite de X . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n \rightarrow f$.
2. Considérer le cas particulier $X_i = Y$ pour tout $i \in I$. Alors $Y^I = \prod_{i \in I} X_i$ est l'ensemble de toutes les fonctions $: I \rightarrow Y$. Conclure que $f_n \rightarrow f$ dans la topologie produit de Y^I si et seulement si $f_n \rightarrow f$ simplement

Exercice 3.6 (métrisabilité d'un produit au plus dénombrable)

1. On suppose que X_1, \dots, X_n soient des espaces métriques. Montrer que la "distance infini" sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ (obtenue en prenant le maximum des distances des composantes) induit la topologie produit. (En particulier, le produit fini d'espaces topologiques métrisables est métrisable).
2. Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Soit $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ l'espace topologique produit. On se propose de montrer que X est métrisable. Soit

$$D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots).$$

- (a) Montrer que D définit une distance sur X et que les projections $p_n : (X, D) \rightarrow (X_n, d_n)$ sont continues.
- (b) Soit $B(x, r)$ une boule de (X, D) et $y \in B(x, r)$. Construire un ouvert U_y de la topologie produit tel que $y \in U_y \subset B(x, r)$.
- (c) Conclure.

Exercice 3.7 (non métrisabilité d'un produit d'espaces métriques) Considérons l'espace \mathcal{F} des applications définies sur $[0, \pi]$ et à valeurs dans $[-1, 1]$. On peut voir \mathcal{F} comme l'espace produit

$$\mathcal{F} = \prod_{\alpha \in [0, \pi]} \mathcal{F}_\alpha,$$

avec $\mathcal{F}_\alpha = [-1, 1]$, $\alpha \in [0, \pi]$. Le but de l'exercice est de montrer que \mathcal{F} muni de la topologie produit n'est pas métrisable.

- (a) Montrer que si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de \mathcal{F} alors $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f pour la topologie produit si et seulement si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f .
- (b) Supposons que \mathcal{F} soit métrisable et considérons la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$f_n(\alpha) = \sin(n\alpha), \quad \alpha \in [0, \pi].$$

- (i) Montrer¹ qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge dans \mathcal{F} vers une fonction f .
- (ii) Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x) \sin(n_k x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Conclure à l'aide du théorème de Riemann-Lebesgue : *Si f est Lebesgue-intégrable dans un intervalle $[a, b]$, alors $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) \exp(ikx) dx = 0$.*

- (c) \mathcal{F} est-il séquentiellement compact ?

Exercice 3.8 (Suites exhaustives de compacts) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , où $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n \geq 1}$ de Ω vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) tout compact K de Ω est inclus dans un K_n ;
- (ii) pour tout $n \geq 1$, le compact K_n est inclus dans l'intérieur du compact K_{n+1} ;
- (iii) on a $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n$.

Exercice 3.9 (Topologie de la convergence uniforme sur tout compact) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , où $d \in \mathbb{N}^*$. Soit K_n une suite exhaustive de compacts pour Ω .

- (a) Pour $h \in C(\Omega)$ et $n \geq 1$, on pose

$$p_n(h) := \sup_{z \in K_n} |h(z)|.$$

$p_n : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définit-elle une norme ?

- (b) On définit $d : C(\Omega) \times C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}, \quad (f, g) \in C(\Omega) \times C(\Omega).$$

Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique et que la convergence d'une suite dans cet espace métrique traduit la convergence uniforme sur tout compact.

- (c) Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique complet.
- (d) Soit $B(0, r)$ une boule de (X, d) , où $r > 0$. Montrer que $B(0, r)$ contient une droite complexe $\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\}$. En déduire que la topologie de $C(\Omega)$ n'est pas normable.

¹On pourra faire appel au théorème de Tychonoff

4 Théorème de Stone-Weierstrass

Exercice 4.1 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Vrai ou faux ?

1. Il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$, où la série est uniformément convergente dans $[0, 1]$.
2. Il existe une suite de réels (a_k) telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, où la série est uniformément convergente dans $[0, 1]$.

Exercice 4.2 Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\int_a^b f^2(t) dt = 0$, puis que $f \equiv 0$.

Exercice 4.3 Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Etudier la limite de la suite

$$u_n = n \int_0^1 f(t) e^{-nt} dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4.4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit la limite uniforme dans \mathbb{R} d'une suite de polynômes.

Exercice 4.5 Soit $m \in \mathbb{N}$ et $C^m([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs réelles et de classe C^m , normé par $\|\cdot\|_{C^m} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \dots + \|f^{(m)}\|_{\infty}$. Montrer que l'ensemble des polynômes est dense dans cet espace.

(Indication : on peut se ramener au cas $m = 1$).

Exercice 4.6 Soit (X, d) un espace métrique compact et soit a un point de X . Soit A une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ vérifiant :

- (i) pour tout $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- (ii) pour toute fonction $f \in A$, $f(a) = 0$.

Montrer que $\overline{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(a) = 0\}$.

Exercice 4.7 Soit X un compact de \mathbb{R}^n et $f \in C(X, \mathbb{R})$. Montrer que f est la limite uniforme d'une suite de polynômes de n variables.

Exercice 4.8 (familles totales d'un e.v.n.) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est dite totale si $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans E .

1. Soit X un espace métrique compact et $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $f_n(x) = f(x)^n$, soit totale dans $C(X, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
2. Peut-on construire de telles familles dans le cas $X = [0, 1] \times [0, 1]$?

Exercice 4.9 Soit $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} vérifiant :

- (i) $\varphi_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = 1$.

(iii) La suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact ne contenant pas 0.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$(\varphi_n \star f)(x) = \int_{-1}^1 f(x-t)\varphi_n(t) dt.$$

a) Montrer que la suite $(\varphi_n \star f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact.

b) Montrer que la suite $\Phi_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{c_n}$, $n \in \mathbb{N}$, vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) où c_n est une constante convenablement choisie.

c) On suppose que f est nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$. Montrer que $\Phi_n \star f|_{[-1/2, 1/2]}$ est un polynôme. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction réelle définie et continue sur un intervalle compact de \mathbb{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 4.10 (Théorème de Fejèr) On note \mathbb{T} le cercle unité du plan complexe et on appelle polynôme trigonométrique une fonction définie sur \mathbb{T} et du type

$$p(\zeta) = \sum_{k=-m}^n a_k \zeta^k, \quad \text{où } m, n \in \mathbb{N}, \text{ et } a_k \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{T}.$$

Montrer que toute fonction continue sur \mathbb{T} est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. Autrement dit, l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $C(\mathbb{T})$ (pour la topologie naturelle, i.e. celle de la convergence uniforme).

Exercice 4.11 (Théorème de prolongement de Tietze) Soient X un espace métrique et K une partie compacte non vide de X . On désigne par $C_b(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de X dans \mathbb{C} muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

$C(K)$ est aussi muni de la norme uniforme, notée aussi $\|\cdot\|$. On considère l'application linéaire Φ de $C_b(X)$ dans $C(K)$ définie par $\Phi(f) = f|_K$, $f \in C_b(X)$ (restriction de f à K).

a) Démontrer que $C_b(X)$ est un espace de Banach.

b) Démontrer que si $f \in C_b(X)$, il existe un élément \tilde{f} de $C_b(X)$ tel que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$ (indication : considérer $\frac{f}{\max\{1, |f|/\|\Phi(f)\|\}}$).

c) Démontrer que l'image de Φ est dense dans $C(K)$.

d) Soit g un élément de $C(K)$, limite uniforme d'une suite $(\Phi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

(i) Démontrer que l'on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que pour tout n , $\|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leq 2^{-n}$.

(ii) Démontrer que la série

$$\tilde{f}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{(f_{n+1} - f_n)}$$

converge dans l'espace $C_b(X)$ (où \sim est défini ci-dessus). On note f sa somme.

(iii) Démontrer que $\Phi(f) = g$.

e) Déduire de ce qui précède que toute fonction $g \in C(K)$ admet un prolongement en une fonction $f \in C_b(X)$ telle que $\|f\| = \|g\|$.

5 Le théorème d'Ascoli

Exercice 5.1 Les ensembles de fonctions suivantes sont-ils relativement compacts dans $C([0, 1])$?

- (i) $f_n(t) = t^n, (n \in \mathbb{N})$, (ii) $f_n(t) = \sin(nt), (n \in \mathbb{N})$.
 (iii) $f_n(t) = \sin(t + n), (n \in \mathbb{N})$, (iv) $f_\alpha(t) = \sin(\alpha t), (\alpha \in [1, 2])$.

Ces ensembles sont-ils compacts dans $C([0, 1])$?

Exercice 5.2 Soit f_n la fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} définie par $f_n(x) = x^n, n \geq 0$. En quels points de l'intervalle $[0, 1]$, la famille de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle équicontinue ?

Définition (Opérateurs compacts). Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur compact est une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall B \subset E, B$ borné, on a que $T(B)$ est relativement compact dans F .

Exercice 5.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b, E = C([a, b])$ et $K \in C([a, b] \times [a, b])$. Pour $f \in E$, on définit

$$Tf(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt, \quad \text{pour tout } s \in [a, b].$$

- a) Montrer $T \in \mathcal{L}(E)$.
 b) Montrer que T est un opérateur compact.

Exercice 5.4 Soit (X, d) un espace métrique compact et soit H une famille équicontinue d'éléments de $C(X)$.

- a) Soit J l'ensemble des points x de X tels que l'ensemble $\{f(x) : f \in H\}$ est borné. Démontrer que J est ouvert et fermé.
 b) On suppose que X est connexe. Démontrer que si J n'est pas vide, alors H est une partie relativement compact de $C(X)$.

Exercice 5.5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On munit l'espace $C(\Omega)$ de la métrique de la convergence uniforme sur tout compact, définie comme² dans l'Exercice 3.3. Soit $A \subset C(\Omega)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note $A|_K = \{f|_K : f \in C(\Omega)\}$.

Montrer que $A \subset C(\Omega)$ est relativement compact si et seulement si $A|_K \subset C(K)$ est relativement compact pour tout compact $K \subset \Omega$.

En déduire, pour l'espace $C(\Omega)$, un énoncé analogue au théorème d'Ascoli.

Exercice 5.6 On munit l'espace $C(\mathbb{R})$ de la métrique de la convergence uniforme sur tout compact, définie comme dans l'Exercice 3.3. Soit $g \in C_0(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions continues avec limite nulle à l'infini), $g \neq 0$, et $A = \{g(\cdot - \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Démontrer que A est relativement compact. Calculer \overline{A} .

²Rappelons que si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , il existe une suite exhaustive de compacts $(K_n)_{n \geq 1}$ pour Ω . Si $h \in C(\Omega)$ et $n \geq 1$, on pose

$$p_n(h) = \sup_{z \in K_n} |h(z)|,$$

et on définit $d : C(\Omega) \times C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}, \quad (f, g) \in C(\Omega) \times C(\Omega).$$

On rappelle que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique complet et qu'une suite (f_n) converge dans cet espace si et seulement si la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$.

5.1 Applications du théorème d'Ascoli : les théorèmes de Montel et Vitali

Exercice 5.7 (Théorème de Montel) Soit U un ouvert non vide de \mathbb{C} . On note par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U muni de la distance induite par $(C(U), d)$, où d est la métrique de la convergence uniforme sur les compacts (voir l'Exercice 3.3).

a) Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est complet.

(Indication : On pourra utiliser le théorème de Morera : $f \in \mathcal{H}(U) \iff f \in C(U)$ et $\int_\gamma f = 0$ pour tout circuit triangulaire $\gamma \subset U$).

b) Pour K compact non vide inclus dans U , on note

$$\delta = \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} \setminus U) \text{ et } K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq \delta\}.$$

(i) Vérifier que K_δ est un compact inclus dans U .

(ii) Montrer que pour tout K compact non vide inclus dans U et toute f holomorphe dans U , on a :

$$\sup\{|f'(z)| : z \in K\} \leq \frac{1}{\delta} \sup\{|f(z)| : z \in K_\delta\}.$$

(Indication : On pourra appliquer à f' la formule de Cauchy : $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, où $\Gamma \subset U$ est un cercle centré en z_0 et $n \in \mathbb{N}$).

(iii) En utilisant le théorème d'Ascoli et l'Exercice 5.5, démontrer le **théorème de Montel** :

Une partie A de $\mathcal{H}(U)$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}(U)$ si et seulement si elle est uniformément bornée³ sur tout compact.

Exercice 5.8 (Théorème de Vitali) Dédurre du théorème de Montel le résultat suivant :

Soit U un ouvert non vide et connexe de \mathbb{C} , et $A \subset U$ une partie de U ayant au moins un point d'accumulation. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{H}(U)$ uniformément bornée sur tout compact. Si pour tout z de A la suite $(f_n(z))$ converge dans \mathbb{C} , alors la suite (f_n) converge dans $\mathcal{H}(U)$.

6 Séparabilité

Définition. On dit qu'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est *séparable* s'il contient une partie A au plus dénombrable qui est dense dans X .

Exercice 6.1 (Preliminaires)

(a) Soit $(A_i)_{i \in I}$ un ensemble au plus dénombrable de parties d'un ensemble E . Montrer que si A_i est au plus dénombrable pour tout $i \in I$, alors la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$ est au plus dénombrable.

(b) Est-ce que ce résultat subsiste pour le produit cartésien? On pourra considérer $E_n = \{0, 1\}$, $n \geq 0$ et

$$E = \prod_{n \geq 0} E_n = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}.$$

Exercice 6.2 Soit I un ensemble fini ou dénombrable et pour tout $i \in I$, X_i un espace topologique, $X_i \neq \emptyset$. Considérons

$$X := \prod_{i \in I} X_i$$

muni de la topologie produit. Montrer que si pour chaque $i \in I$, X_i est séparable, alors X est séparable.

Exercice 6.3 Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si X est compact, alors X est séparable.

³C'est à dire : pour tout compact $K \subset U$, il existe une constante $M(K) \geq 0$ telle que $\sup_{f \in A} \sup_{z \in K} |f(z)| \leq M(K)$.

Exercice 6.4 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et notons par F le sous-espace vectoriel engendré par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Supposons que F est dense dans E . Montrer alors que E est séparable.

Exercice 6.5 Soit X un espace métrique compact. Montrer que $C(X, \mathbb{R})$ est séparable.
(*Indication* : prendre une suite (x_n) dense dans X et considérer l'algèbre engendrée par les fonctions $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = d(x_n, x)$).

Exercice 6.6 Soit (X, d) un espace métrique. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, un ensemble I infini non dénombrable et $(x_i)_{i \in I} \subset X$ tels que

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Montrer que (X, d) n'est pas séparable.

Exercice 6.7

- (a) Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, les espaces ℓ^p et c_0 sont séparables.
- (b) En considérant les suites formées de 0 et de 1, montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 6.8 Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si E est séparable et de dimension infinie, alors il existe une suite dense $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs linéairement indépendants de E .

(Rappelons qu'une famille infinie est dite linéairement indépendante si toute sous-famille finie est linéairement indépendante).

Exercice 6.9 Soit (X, d) un espace métrique.

- (a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) L'espace (X, d) est séparable.
 - (ii) La topologie de X est à base dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n \geq 1}$ de X tel que tout ouvert U de X s'écrive comme la réunion d'ouverts U_n .
- (b) On suppose maintenant que (X, d) est séparable. En déduire que toute partie de E , munie de la topologie induite, est séparable.

Nous allons voir dans l'exercice suivant que ce résultat n'est plus vrai dans un espace topologique quelconque.

Exercice 6.10 Soit \mathcal{B} la famille des rectangles semi-ouverts du plan \mathbb{R}^2 de la forme

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\}.$$

- (a) Montrer que \mathcal{B} est une base d'une topologie τ sur \mathbb{R}^2 .
- (b) Montrer que la topologie induite τ_D sur la droite

$$D = \{(x, y) : x + y = 0\}$$

est la topologie discrète.

- (c) Montrer que (\mathbb{R}^2, τ) est séparable mais que (D, τ_D) n'est pas séparable.

7 Théorème de Hahn-Banach : forme analytique

Exercice 7.1 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé réel $(E, \|\cdot\|)$ et $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Un prolongement de Hahn-Banach de g est une application linéaire continue $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_F = g$ et $\|f\| = \|g\|$.

Montrer qu'il n'y a pas, en général, unicité du prolongement. Discuter en particulier le cas $E = \mathbb{R}^2$, avec de différentes normes.

Exercice 7.2 Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que E^* est de dimension infinie.

Exercice 7.3 Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{C} . Comparer les formules

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} |\varphi(x)|$$

et

$$\|x\|_E = \max_{\varphi \in E^*, \|\varphi\|_{E^*}=1} |\varphi(x)|.$$

Laquelle est une conséquence de Hahn-Banach ? Montrer qu'en général le sup n'est pas un max dans la première formule.

(*Indication* : on pourra chercher un exemple d'une application $\varphi \in (\ell^1)^*$ de la forme $\varphi(x) = \sum_k \alpha_k x_k$ où (α_k) est bien choisie).

Exercice 7.4 Soient E et F deux e.v.n. Montrer que

$$F \text{ est de Banach} \iff \mathcal{L}(E, F) \text{ est de Banach}.$$

Pour l'implication " \Leftarrow ", considérer une suite de Cauchy (y_n) dans F . Considérer ensuite les opérateurs linéaires $T_n: E \rightarrow F$ de la forme $T_n(x) = f(x)y_n$, où $f \in E^*$, $f \neq 0$.

Exercice 7.5 Soient E et F des espaces normés et soit $T: E \rightarrow F$ une application linéaire continue. On note $T^*: F^* \rightarrow E^*$ l'opérateur linéaire transposé, défini par $\langle T^*v, x \rangle = \langle v, Tx \rangle$.

1. Démontrer que $\|T\| = \|T^*\|$.
2. Démontrer que $\text{Im}(T)$ est dense dans F si et seulement si T^* est injectif.

Exercice 7.6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, M un sous-espace vectoriel fermé de E et soient $x_0 \in E \setminus M$. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que

$$\varphi|_M = 0, \|\varphi\| = 1, \varphi(x_0) = d(x_0, M).$$

Exercice 7.7 Soit E un espace normé tel que E^* est séparable.

1. Montrer, en utilisant la séparabilité de $S^* = \{x^* \in E^* \mid \|x^*\| = 1\}$ qu'il existe une famille $\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de S^* dense dans S^* et une famille $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ telles que $|x_n^*(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que E est séparable.

Remarque : la réciproque est fautive, c'est-à-dire qu'un espace normé E peut-être séparable sans que son dual le soit (ℓ^1 est séparable mais son dual ℓ^∞ ne l'est pas).

Exercice 7.8 Soit E un espace vectoriel normé, soit E^* son dual et soit E^{**} le dual de E^* , que l'on appelle aussi le bidual de E . Montrer que l'application $J : E \rightarrow E^{**}$ définie par

$$[J(x)](f) = f(x), \quad f \in E^*$$

est une application linéaire isométrique, c.-à-d. $\|J(x)\| = \|x\|$.

Interpréter cette égalité dans le cas $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Il est d'usage d'identifier E avec $J(E)$, sous-espace de E^{**} , et ainsi de considérer, via cette identification, X comme un sous-espace de E^{**} . Lorsque J est surjective, et donc $E = E^{**}$, on dit que E est un espace réflexif.

Montrer que si E n'est pas de Banach, alors J n'est pas surjective.

Exercice 7.9 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, A une partie de E , $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ une application et $c \in \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in E^*$ telle que

$$\tilde{f}|_A = f \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}\| \leq c$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in A^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \right| \leq c \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|.$$

Exercice 7.10 Soit E un espace vectoriel normé et soit E^* son dual. Pour $A \subset E$ on pose :

$$A^\perp = \{f \in E^* \mid f(x) = 0, x \in A\}.$$

Pour $B \subset E^*$ on pose :

$${}^\perp B = \{x \in E \mid f(x) = 0, f \in B\}.$$

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\overline{F} = {}^\perp(F^\perp)$.

8 Théorèmes de Hahn-Banach : forme géométrique, séparation de convexes disjoints

Dans cette partie tous les e.v.n. sont réels.

Définition. Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, un hyperplan (affine) sur E est un ensemble de la forme $H = \{x \in E : \varphi(x) = \gamma\}$, où $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire, $\varphi \neq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.1

1. Montrer que tous les hyperplans de E sont de la forme $H = \text{Ker}(\varphi) + \{x_0\}$, avec $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, et réciproquement.
2. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire *non continue*. Démontrer que $\text{Ker}\varphi$ est dense dans E .
3. Conclure qu'un hyperplan $\text{Ker}\varphi + \{x_0\}$ est fermé si et seulement si $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$.

Rappelons les résultats du cours suivants :

Théorème 1 (Hahn-Banach). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et soient A et B deux convexes *disjoints* non vides de E . On suppose A *ouvert*. Il existe alors un hyperplan affine fermé séparant A et B au sens large :

$$\exists \varphi \in E^*, \exists c \in \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \varphi(x) < c \leq \varphi(y).$$

Voici une variante de ce théorème (voir [Brezis]) utile quand A et B ne sont pas ouverts :

Théorème 2 (Hahn–Banach). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et soient A et B deux convexes non vides de E . On suppose que $d(A, B) > 0$ (en particulier, A et B sont disjoints). Il existe alors un hyperplan affine fermé séparant A et B au sens strict :

$$\exists \varphi \in E^*, \quad \exists c \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \varphi(x) \leq c - \epsilon < c + \epsilon \leq \varphi(y).$$

Exercice 8.2 Dédurre le Théorème 2 ci-dessus du Théorème 1.

Exercice 8.3

1. Montrer que si E est un e.v.n de dimension infinie, alors il existe deux parties A et B de E convexes et denses, telles que $A \cap B = \emptyset$ et $E = A \cup B$. (*Indication* : il existe une application linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ non continue...)
2. Peut-on séparer A et B avec un hyperplan fermé ? Comparer votre réponse avec les théorèmes de Hahn–Banach géométriques ci-dessus.

Exercice 8.4 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et soit A un ensemble convexe fermé non vide de E . Montrer que A est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant A . On rappelle qu'un demi-espace D est défini par la donnée de $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et de $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $D = \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \gamma\}$ ou $D = \{x \in E \mid \varphi(x) \geq \gamma\}$.

Donner une interprétation topologique de ce résultat.

9 Dualité. Espaces reflexifs.

Notation. Soient E et F deux e.v.n. On écrit $E \simeq F$ lorsqu'il existe une isométrie linéaire surjective $\psi: E \rightarrow F$. On dit aussi que E s'identifie à F .

On rappelle les résultats du cours suivants.

Théorème. Soient E et F deux e.v.n., $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ l'opérateur transposé. On a $\|T\| = \|T^*\|$. De plus, si T est inversible alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T est une isométrie alors T^* est une isométrie. En particulier,

$$E \simeq F \quad \implies \quad E^* \simeq F^*.$$

Théorème. Soit E un Banach. Alors E est reflexif si et seulement si E^* est reflexif.

Théorème. Soit E un e.v.n. reflexif et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors F est reflexif si et seulement si F est fermé.

Exercice 9.1 (Dualité des espaces ℓ^p) Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué. On va montrer dans cet exercice que le dual de $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ s'identifie à $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$, c'est à dire $(\ell^p)^* \simeq \ell^q$.

1. Pour tout $f \in \ell^q$, on définit $L_f: \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$ par la relation

$$L_f(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \varphi(n) \quad \forall \varphi \in \ell^p.$$

Montrer que L_f est une application linéaire continue, et montrer que $\|L_f\| = \|f\|_q$, où $\|L_f\|$ désigne la norme de L_f comme application de ℓ^p dans \mathbb{C} . On a ainsi obtenu que $L_f \in (\ell^p)^*$.

2. Montrer que l'application $L: \ell^q \rightarrow (\ell^p)^*$ est linéaire et injective. On a ainsi montré qu'il existe une inclusion naturelle $\ell^q \subset (\ell^p)^*$ qui préserve la norme.
3. Montrer que l'application L est surjective. Il s'agit donc de montrer que pour tout $F \in (\ell^p)^*$ il existe $f \in \ell^q$ tel que $L_f = F$. Pour ce faire on considérera pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'élément e_n de ℓ^p de la forme $e_n(m) = \delta_{n,m}$ pour $m \in \mathbb{N}$. On posera $f(n) := F(e_n)$ et on montrera alors que $f \in \ell^q$ et que $L_f = F$.

Exercice 9.2 Dédurre de l'exercice précédent que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, pour $1 < p < \infty$, est réflexif.

Exercice 9.3 Soit A un sous-espace vectoriel *dense* dans un e.v.n. E . Démontrer que $A^* \simeq E^*$.

Exercice 9.4 Soit $1 < p_1 < p_2 < \infty$. Soit q_1 et q_2 les exposants conjugués de p_1 et p_2 respectivement. Êtes-vous d'accord avec l'argument suivant ?

On a $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$ et ℓ^{p_1} est dense dans ℓ^{p_2} . D'après l'exercice précédent, $(\ell^{p_1})^* \simeq (\ell^{p_2})^*$. D'autre part, $(\ell^{p_1})^* \simeq \ell^{q_1}$ et $(\ell^{p_2})^* \simeq \ell^{q_2}$. Donc $\ell^{q_1} \simeq \ell^{q_2}$.

Exercice 9.5 Etablir les identifications

1. $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$,
2. $(c_0)^* \simeq \ell^1$,
3. $(c_{00})^* \simeq \ell^1$,

en définissant des isométries linéaires surjectives L comme dans l'exercice ci-dessus.

Noter que les préduaux d'un espace ne sont pas tous isométriques.

Exercice 9.6

1. Démontrer que $(\ell^\infty)^*$ n'est pas homéomorphe à ℓ^1 .
(Indication : on pourra utiliser un argument de séparabilité). En déduire que ℓ^1 n'est pas réflexif, puis que ℓ^∞ n'est pas réflexif.
2. Donner une autre démonstration de la non réflexivité de ℓ^1 :
 - (a) Soit $f \in (\ell^\infty)^*$ tel que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ pour toute suite $x = (x_n)$ convergente. Justifier l'existence d'un tel f .
 - (b) Montrer qu'il n'y a pas $\alpha \in \ell^1$ vérifiant $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k x_k$ pour tout $x \in \ell^\infty$.
 - (c) En déduire que l'injection canonique $J: \ell^1 \rightarrow (\ell^1)^{**}$ n'est pas surjective.

Exercice 9.7

1. Démontrer que dans un e.v.n. réflexif $(E, \|\cdot\|)$, toute fonctionnelle $f \in E^*$ réalise la norme. Autrement dit : $\exists x_0 \in E, \|x_0\|_E = 1$ tel que $\|f\|_{E^*} = |f(x_0)|$ (et donc, dans la définition de la norme $\|f\|_{E^*}$, le sup est aussi un max).
Retrouver par cette méthode que ℓ^1 n'est pas réflexif.
2. Dédurre de la question précédente que l'espace de Banach $C([0, 1])$ n'est pas réflexif.
(Indication : Considérer la fonctionnelle $\Phi = \int_0^{1/2} - \int_{1/2}^1$).
3. Montrer que $C^1([0, 1])$, muni de sa norme naturelle $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, n'est pas réflexif.
(Indication : on pourra commencer par démontrer que l'espace $E = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 1\}$ n'est pas réflexif avec la norme $\|f\|_E = \|f'\|_\infty$).

Remarque. La réciproque de la première question est vraie aussi : un théorème de James affirme qu'une espace de Banach E est réflexif si et seulement si toute fonctionnelle $f \in E^*$ réalise la norme.

Exercice 9.8 Démontrer que si E et F sont deux espaces vectoriels normés isomorphes (=linéairement homéomorphes), alors E est réflexif si et seulement si F est réflexif.

Définition. Soit C un convexe d'un e.v.n. On dit que $x \in C$ est un point extrémal de C s'il n'y a pas de segment de C contenant x à son intérieur.

Exercice 9.9

1. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée de c et de c_0 ? (Comme toujours, on munit ces espaces de la norme $\|\cdot\|_\infty$).
2. Démontrer que c_0 est isomorphe à c .
3. Démontrer que $(c_0, \|\cdot\|_\infty) \not\cong (c, \|\cdot\|_\infty)$ (autrement dit, il n'y a pas d'isomorphisme isométrique). On pourra utiliser les points extrémaux.

Remarque On peut déduire du Théorème de Krein–Milman (voir [Rudin, *Functional Analysis*]), du théorème de Banach–Alaoglu et de l'exercice précédent que c_0 n'a pas de prédual.

De la même manière, on montre que $L^1([0, 1])$ n'a pas de prédual.

10 Topologies faibles

Notation. La topologie faible sur un e.v.n. E est notée $\mathcal{T}(E, E^*)$. On note aussi E_f l'espace E lorsqu'il est muni de la topologie sa faible. Sur E^* , on note $\mathcal{T}(E^*, E)$ la topologie faible-*.

On rappelle les résultats du cours suivants :

Théorème (Banach–Alaoglu). Soit E un e.v.n. et E^* son dual topologique. La boule fermée $\overline{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible-*.

Théorème. Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si la boule $\overline{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$ est compacte avec la topologie faible.

Corollaire. Soit F un e.v.n. et $E = F^*$. Les topologies faibles et faible-* sur E coïncident si et seulement si E est réflexif.

Théorème (Mazur). Soit C une partie convexe fermée d'un e.v.n. E . Alors C est fermée aussi avec la topologie faible.

Exercice 10.1 Soient E et F deux e.v.n. Démontrer que $L \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow L \in \mathcal{L}(E_f, F_f)$.

Observer que $\Phi \in C(E, F) \not\Rightarrow \Phi \in C(E_f, F_f)$ (voir aussi ci-dessous pour un contreexemple avec $F = \mathbb{R}$).

Exercice 10.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie

- a) Montrer que la topologie faible et usuelle coïncident sur E .
- b) Montrer que les trois topologies sur E^* (forte, faible et faible*) coïncident.

En dimension infinie, nous allons voir ci-dessous qu'il existe *toujours* des ensembles fermés/ouverts pour la topologie forte qui ne sont pas fermés/ouverts pour la topologie faible.

Exercice 10.3 (les boules ne sont pas faiblement ouvertes) Soit E est un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit V un voisinage de 0 pour la topologie faible.

Démontrer qu'il existe $f_1, \dots, f_n \in E^*$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$V \supset f_1^{-1}(B_\epsilon) \cap \dots \cap f_n^{-1}(B_\epsilon)$$

où $B_\epsilon = B(0, \epsilon)$ désigne la boule de $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

En déduire que V contient une droite. Conclure que la boule $B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ n'est pas ouverte dans la topologie faible.

Exercice 10.4 (les sphères ne sont pas faiblement fermées) Considérons $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$, où E est un espace vectoriel normé de dimension infinie.

Soit $x_0 \in E$, $\|x_0\| < 1$. Considérons un voisinage V de x_0 pour la topologie faible.

- i) Montrer qu'il existe une droite de E passant par x_0 contenue dans V .

ii) En déduire que S n'est pas fermée pour la topologie faible. Quelle est l'adhérence faible de S_E ?

Exercice 10.5 On rappelle que $c_0^* \simeq \ell^1$ et $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$.

Soit

$$\Sigma = \{f \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0\}, \quad S = \{f \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 0\}.$$

1. Etablir si Σ est fermé avec la topologie forte, avec la topologie $\mathcal{T}(\ell^1, \ell^\infty)$, et avec la topologie $\mathcal{T}(\ell^1, c_0)$.
2. Mêmes questions pour S .
(Indication : soit $f \in \ell^1$. Construire $(f_k) \subset S$ telle que $f_k \xrightarrow{*} f$).
3. Conclure qu'il existe un ensemble $C \subset E^*$, avec C convexe et fermé dans E^* , mais tel que C n'est pas fermé dans $\mathcal{T}(E^*, E)$. Le théorème de Mazur n'est donc plus vrai pour la topologie faible-*

Exercice 10.6 Vrai ou faux ?

1. Soit E un e.v.n reflexif. Soit $C \subset E$, avec C convexe, fermé et borné. Alors C est compact pour la topologie faible.
2. Soit E un e.v.n. Soit $C \subset E^*$ avec C convexe, fermé et borné. Alors C est compact pour la topologie faible-*

11 Théorème de Banach–Steinhaus

Théorème de Banach-Steinhaus : Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Supposons que E soit un espace de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une collection de $\mathcal{L}(E, F)$. Si pour tout $x \in E$, on a $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Théorème de Banach-Steinhaus sur la convergence : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit \mathcal{D} un ensemble dense de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ existe.
- b) $\forall x \in \mathcal{D}, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$ existe et $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, l'application $T : E \rightarrow F$ définie par $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ est linéaire et continue avec $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$.

Exercice 11.1 (les suites faiblement convergentes sont bornées) Soit E un espace de Banach et E^* son dual. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de E , et $(\Lambda_n)_n$ une suite de E^* .

- a) Montrer que si $\Lambda_n \xrightarrow{*} \Lambda$ alors $(\|\Lambda_n\|)_n$ est bornée et $\|\Lambda\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Lambda_n\|$.
- b) Montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Exercice 11.2 Soit E un espace de Banach et E^* son dual. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de E , et $(\Lambda_n)_n$ une suite de E^* .

- a) Montrer que si $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ pour la topologie forte et si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\langle \Lambda_n, x_n \rangle \rightarrow \langle \Lambda, x \rangle$.
- b) Montrer que si $\Lambda_n \xrightarrow{*} \Lambda$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\langle \Lambda_n, x_n \rangle \rightarrow \langle \Lambda, x \rangle$.
- c) Construire un exemple d'une suite $x_n \rightharpoonup x$ et d'une suite $\Lambda_n \xrightarrow{*} \Lambda$ telles que $\langle \Lambda_n, x_n \rangle \not\rightarrow \langle \Lambda, x \rangle$.

Exercice 11.3 Soit $1 < p \leq \infty$. Soit $(f_k) \subset \ell^p$.

1. Montrer que, si $1 < p < \infty$, $f_k \rightarrow f$ si et seulement si (f_k) est bornée dans $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $f_k(n) \rightarrow f(n)$.
2. Montrer que si $p = +\infty$, $f_k \xrightarrow{*} f$ (dans la topologie $\mathcal{T}(\ell^\infty, \ell^1)$) si et seulement si (f_k) est bornée dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $f_k(n) \rightarrow f(n)$.

Remarque. Pour l'espace ℓ^1 , on peut démontrer le résultat inattendu suivant: $f_k \rightarrow f \iff f_k \rightharpoonup f$ (propriété de Schur). En particulier, (i) la sphère $\{x \in \ell^1 : \|x\|_1 = 1\}$ est *séquentiellement fermée* avec la topologie faible de ℓ^1 (mais non-fermée avec cette même topologie !). (ii) l'application $x \mapsto \|x\|_1$ est *séquentiellement continue* (mais non continue !) avec la topologie faible de ℓ^1 ,

Exercice 11.4 Soit E_1 un espace de Banach et soient E_2 et F deux espaces vectoriels normés. Soit $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, c.-à-d. pour tout $x \in E_1$, l'application de E_2 dans F qui à y associe $B(x, y)$ est continue et pour tout $y \in E_2$, l'application de E_1 dans F qui à x associe $B(x, y)$ est continue. Montrer que B est continue sur $E_1 \times E_2$.

Exercice 11.5 (La série de Fourier d'une fonction continue peut diverger) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qui sont 2π -périodiques et continues dans \mathbb{R} , muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note

$$\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} dt,$$

le p -ième coefficient de Fourier de f . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application $T_n : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^n c_p(f).$$

1. Supposons l'existence d'une suite $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de fonctions continues, 2π -périodiques, telles que $\|g_n\|_\infty \leq 1$ et $|T_n(g_n)| \rightarrow \infty$. Dédurre du théorème de Banach–Steinhaus qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier $\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p(f) e^{ipt}$ diverge en $t = 0$.
2. On se propose de construire la suite (g_n) .
 - (a) Soit E l'espace des fonctions 2π -périodiques, continues par morceaux, muni de la norme $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$. Montrer que $T_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.
 - (b) Soit $D_n(t) = \sum_{p=-n}^n e^{ipt}$. Montrer, en utilisant une série géométrique, que $D_n(t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$. Conclure que $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ (ne pas calculer l'intégrale, mais chercher une minoration).
 - (c) Soit $h_n(t) = \text{sign}(D_n(t))$. Démontrer que $T_n(h_n) = \|D_n\|_1$.
 - (d) Construire une suite (g_n) de fonctions continues dans \mathbb{R} et 2π -périodiques vérifiant $\|g_n\|_\infty = 1$ et $\|h_n - g_n\| \leq \frac{1}{n}$. Conclure que $|T_n(g_n)| \rightarrow \infty$.

12 Les théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé

Théorème de l'application ouverte : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors :

- a) Il existe $C > 0$ tel que $\forall y \in Y, \exists x : T(x) = y$ avec $\|x\| \leq C\|y\|$.
- b) Si \mathcal{V} est un ouvert de X , $T(\mathcal{V})$ est un ouvert de Y .

Exercice 12.1 Démontrer le théorème de Banach qui affirme que : *si E et F sont deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Soit E l'espace des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Construire une application linéaire $T : E \rightarrow F$ continue et bijective, avec inverse $T^{-1} : F \rightarrow E$ discontinue.

Exercice 12.2 (Rigidité de la norme)

1. Montrer que, dans un e.v.n. de dimension infinie, on peut toujours construire une nouvelle norme strictement plus forte (autrement dit, la topologie induite par la nouvelle norme est strictement plus fine). (*Indication* : définir une nouvelle norme en considérant une application linéaire discontinue).
2. En appliquant le théorème de l'application ouverte à l'identité, démontrer le fait suivant : *On ne peut pas mettre sur un e.v. deux normes de Banach dont l'une est strictement plus forte que l'autre.*

Exercice 12.3 Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire.

1. On suppose que

$$(x_n \rightarrow x \text{ et } Tx_n \rightarrow y) \Rightarrow y = Tx. \quad (*)$$

Montrer que $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ définit une nouvelle norme de Banach sur E .

2. En déduire que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si T vérifie (*).
3. Donner une interprétation topologique de la condition (*).

Théorème du graphe fermé : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si $G(T) := \{(x, T(x)) : x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Exercice 12.4 Soit $T : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ l'opérateur de dérivation, $T(f) = f'$. Montrer que si $C^1([0, 1])$ et $C([0, 1])$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors le graphe $G(T)$ est fermé, mais T n'est pas continu.

Exercice 12.5 Pour $x = (x_n) \in \ell^\infty$ et $(a_n) \subset \mathbb{C}$, on pose $\|x\| = \sum_1^\infty |a_n x_n|$.

1. Donner une c.n.s. sur la suite (a_n) pour que $\|\cdot\| : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ définisse une norme.
2. Démontrer que $\|\cdot\|$ n'est jamais équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ dans ℓ^∞ .
3. Démontrer que $\|\cdot\|$ n'est jamais une norme de Banach sur ℓ^∞ .

Exercice 12.6 (Rigidité de la topologie) Soit X un ensemble muni de deux topologies $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. On suppose que (X, \mathcal{T}_1) est séparé et que (X, \mathcal{T}_2) est compact. Montrer que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(En particulier : *Si X est un espace topologique compact et séparé, lorsqu'on rajoute des ouverts on perd la compacité, lorsqu'on en enlève on perd la propriété de séparation.*)

Exercice 12.7 Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que, pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergeant vers 0 et pour toute forme linéaire continue $\varphi^* \in F^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(Tx_n) = 0.$$

Montrer que T est continue (on pourra utiliser le théorème du graphe fermé).

Exercice 12.8 Soit E un espace de Banach, A et B deux sous-espaces fermés de E . Supposons que $E = A + B$. Montrer qu'il existe une constante $\gamma < +\infty$ telle que, pour tout $x \in E$, il existe $(a, b) \in A \times B$ avec

$$x = a + b \quad \text{et} \quad \|a\| + \|b\| \leq \gamma \|x\|.$$

Exercice 12.9 Soit M un sous-espace fermé d'un espace vectoriel normé E . On dit que M admet un *supplémentaire topologique* s'il existe un sous-espace fermé N de E tel que

$$E = M + N \quad \text{et} \quad M \cap N = \{0\}.$$

On utilise dans ce cas la notation $E = M \oplus N$.

1. Soit P une projection sur E , c'est à dire une application linéaire $P: E \rightarrow E$ telle que $P \circ P = P$. On suppose que P est continue. Montrer que alors

$$E = \text{Im}(P) \oplus \ker(P).$$

2. Réciproquement si E est un espace de Banach et si $E = A \oplus B$ (avec A et B deux sous-espaces fermés de E), alors la projection d'image A et de noyau B est continue.
3. En déduire qu'un sous-espace fermé d'un espace de Banach E admet un supplémentaire topologique si et seulement si il est l'image d'une projection continue sur E .

Exercice 12.10 Soit E un e.v.n. et M un sous-espace fermé de E

Montrer que M admet un supplémentaire topologique dans E , dans les deux cas suivant :

- (i) $\dim M < +\infty$
- (ii) $\dim (E/M) < +\infty$.

Indication : pour (i) si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de M , on pourra considérer les applications coordonnées $x \mapsto \alpha_i(x)$, où

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) e_i.$$

Remarque. Un théorème du cours affirme que dans un espace de Hilbert tout sous-espace fermé possède un supplémentaire topologique. On peut démontrer que ce n'est pas le cas en général (même dans les espaces réflexifs).

13 Applications. Un théorème de minimisation des fonctionnelles convexes

Motivation. Soit E un e.v.n. et $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \phi(x) = +\infty$. Il est clair que si $\dim(E) < \infty$ alors ϕ possède un minimum absolu (parce que les fermés bornés sont compacts). Que peut-on dire si $\dim(E) = \infty$?

Exercice 13.1 Montrer que si E est un e.v.n. de dimension infinie et $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\phi: E_f \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas continue, en général.

(Indication : Considérer l'application $\|\cdot\|$).

Définition. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que ϕ est *sémi-continue inférieurement* (s.c.i.) si et seulement si $\forall x \in X \quad \phi(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} \phi(y)$.

Exercice 13.2 (sémi-continuité)

1. Montrer que $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ est s.c.i. si et seulement si : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \{x \in X : \phi(x) > \lambda\}$ est ouvert.

2. Soit $(\phi_i)_{i \in I}$ une collection de fonctions s.c.i. Soit $\phi: x \mapsto \sup_{i \in I} \phi_i(x)$. On suppose que $\phi(x) < +\infty$. Montrer que ϕ est s.c.i. Peut-on remplacer ici "s.c.i." par "continue" ?
3. (Weierstrass) On suppose (X, \mathcal{T}) compact. Montrer que toute fonction $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ s.c.i. possède un minimum absolu dans X .

Exercice 13.3 Soit E un e.v.n. et $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue (ou seulement s.c.i.) Montrer que $\phi: E_f \rightarrow \mathbb{R}$ est encore s.c.i.

Application : montrer que $x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. Montrer qu'en général l'inégalité est stricte.

Exercice 13.4 Dédurre des exercices précédents le théorème suivant:

Théorème Soit E un e.v.n. réflexif. Soit $C \subset E$ une partie non vide convexe et fermée. Soit $\phi: C \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et continue (ou seulement s.c.i.) telle que

$$\lim_{x \in C, \|x\| \rightarrow \infty} \phi(x) = +\infty \quad (\text{cette hypothèse est inutile si } C \text{ est bornée})$$

Montrer que ϕ atteint son minimum absolu : $\exists x_0 \in C$ tel que $\phi(x_0) = \min_{x \in C} \phi(x)$.

Exercice 13.5 (Un résultat d'approximation) Soit E un e.v.n. réflexif et $C \subset E$ convexe et fermé. Montrer que si $x_0 \in E$ il existe dans C un élément de meilleure approximation, c'est à dire : $\exists c \in C$ tel que $\|x_0 - c\| = d(x_0, C)$.

Montrer qu'il n'y a pas unicité (on pourra considérer la boule fermée de $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$).

Remarque. Dans les espaces de Hilbert, il y a existence et unicité (voir le cours).

Exercice 13.6 (Un contreexemple au théorème) Dans l'espace ℓ^1 , on considère l'hyperplan $H = \{f \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \arctan(n) = 1\}$. Démontrer que H est un convexe fermé, mais qu'il n'y a pas dans H d'élément de meilleure approximation pour 0_{ℓ^1} .

En déduire un contreexemple au théorème ci-dessus, en l'absence de réflexivité.

14 Espaces de Hilbert

14.1 Projections sur une partie fermée convexe

Théorème (projection sur un convexe fermé). Soit H un espace de Hilbert et C une partie non vide, convexe et fermé de H . Pour tout $x \in H$ il existe un unique point de C , noté $P_C(x)$, tel que $\|x - P_C(x)\| = \text{dist}(x, C)$.

Théorème (projection sur un sous-espace fermé). Soit M un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert. Alors la projection P_M sur M , définie comme ci-dessus, est linéaire, continue de norme égale à 1. De plus, pour tout $x \in H$, $P_M(x)$ est l'unique élément de M tel que $\forall y \in M, \langle x - P_M(x), y \rangle = 0$. De plus, $\text{Id} - P_M$ est la projection sur $F^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in F\}$.

Exercice 14.1 Soit H un espace de Hilbert. Pour $A \subset H$, A convexe et fermé non vide, on note $P_A(x)$ la projection de $x \in H$ sur A .

- a) Soit $A = \overline{B}(0, 1)$, la boule unité fermée de H . Calculer $P_A(x)$ pour tout $x \in H$.
- b) Soit $\{a_1, \dots, a_n\}$ une famille orthonormale et soit A le sous-espace vectoriel de H engendré par $\{a_1, \dots, a_n\}$. Calculer $P_A(x)$ pour tout $x \in H$.

Exercice 14.2 Donner un exemple d'un ensemble A fermé dans ℓ^2 , tel que $\text{dist}(0, A) = 1$ et tel que $\nexists a \in A$ vérifiant $\|a\|_2 = 1$.

Exercice 14.3 Considérons $X = C([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in X,$$

et $F := \{f \in X : f(0) = 0\}$. On note $\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1.

- a) Vérifier que F est une partie convexe, fermée de X .
- b) Calculer $\text{dist}(\mathbf{1}, F)$ et établir s'il existe dans F un élément de meilleure approximation pour $\mathbf{1}$.

Exercice 14.4 (caractérisation des projections sur un sous-espace) Soient H un espace de Hilbert et $p \in \mathcal{L}(H)$ avec $p \neq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que $p = p_F$ (projecteur orthogonal de H sur F),
- (ii) $p^2 = p$ (i.e. p est idempotente) et $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle, \forall (x, y) \in H^2$ (i.e. p est autoadjointe),

Exercice 14.5 (Suite de l'exercice précédent) Soient H un espace de Hilbert et $p \in \mathcal{L}(H)$ avec $p \neq 0$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (ii) $p^2 = p$ et $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle, \forall (x, y) \in H^2$
- (iii) $p^2 = p$ et $\|p\| = 1$,
- (iv) $p^2 = p$ et $\langle p(x), (Id - p)(x) \rangle = 0, \forall x \in H$.

(Indications : pour (iii) \Rightarrow (iv), poser $q(x) = x - p(x)$ et montrer que $\|p(x)\| \leq \|p(x) + \lambda q(x)\|$. Développer ensuite $\|p(x) + \lambda q(x)\|^2$ et choisir $\lambda \in \mathbb{C}$ comme dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour (iv) \Rightarrow (ii), commencer par développer $\langle p(x + y), q(x + y) \rangle$ et en déduire que $\langle p(x), q(y) \rangle = 0$).

Exercice 14.6 Soit H un espace de Hilbert. On munit $\mathcal{L}(H)$ de la norme opératorielle habituelle. $\mathcal{L}(H)$ est-il de Hilbert ? (Distinguer selon $\dim H$).

Exercice 14.7

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels fermés et orthogonaux d'un espace de Hilbert H , alors $F + G$ est fermé.
2. On se propose de construire deux sous-espaces fermés avec somme non fermée. Dans ℓ^2 , soit $A = \text{Vect}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \text{Vect}\{e_{2n} + \frac{1}{n}e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$.
 - (a) Démontrer que $\overline{A + B} = \ell^2$.
 - (b) Montrer que $(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots) \notin \overline{A + B}$. Poser $F = \overline{A}$ et $G = \overline{B}$ et conclure.

Exercice 14.8 (enveloppe convexe) Soit E un e.v.n. et $A \subset E$ une partie non vide de E . On note $\text{co}(A)$ l'enveloppe convexe de A (l'intersection de tous les convexes contenant A).

1. Une combinaison linéaire convexe d'éléments de A est une expression de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ avec $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in A, 0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Démontrer que $\text{co}(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes d'éléments de A .
2. Donner un exemple (dans \mathbb{R}^2) d'un fermé A tel que $\text{co}(A)$ n'est pas fermé.
3. Démontrer la version suivante du théorème de Mazur : dans un e.v.n. E , si $x_n \rightarrow x$, alors on peut trouver une suite (y_n) formée par des combinaisons linéaires convexes de (x_n) telle que $y_n \rightarrow x$.

Exercice 14.9 (convergence des moyennes ergodiques) Soit H un espace de Hilbert et $L : H \rightarrow H$ une application linéaire continue, telle que $\|Lu\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in H$. Soit $w \in H$. On note $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} L^k w$. On se propose de montrer que (w_n) converge vers un point fixe de L .

1. Soit $v \in \text{co}(\{L^k w : k \in \mathbb{N}\})$. On pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} L^j v$. Montrer que $\|w_n - v_n\| \rightarrow 0$.
2. Soit C l'adhérence de $\text{co}(\{L^k w : k \in \mathbb{N}\})$. Justifier l'existence de $u \in C$ tel que $\|u\| = \text{dist}(0, C)$. En déduire $\|w_n\| \rightarrow \|u\|$.
(Indication : pour $\epsilon > 0$ considérer un $v_\epsilon \in \text{co}(\{L^k w : n \in \mathbb{N}\})$ tel que $\|v_\epsilon\| \leq \text{dist}(0, C) + \epsilon$ et appliquer le résultat de la question précédente).
3. Conclure que $w_n \rightarrow u$.
4. Montrer que u est un point fixe pour L .

14.2 Convergence faible dans un espace de Hilbert

Exercice 14.10 Soit $(f_n) \subset H$ et $f \in H$, où H est un espace de Hilbert. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f_n \rightarrow f$
2. $f_n \rightarrow f$ et $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle = \langle f, g \rangle$ uniformément pour tout g avec $\|g\| = 1$.

Exercice 14.11 Soit $u_n \rightarrow 0$ dans un espace de Hilbert H .

1. Montrer que l'on peut extraire de (u_n) une suite (v_n) telle que

$$|\langle v_1, v_k \rangle| \leq k^{-1}, \dots, |\langle v_{k-1}, v_k \rangle| \leq k^{-1}$$

pour tout $k = 2, 3, \dots$

2. En exprimant $\|v_1 + \dots + v_n\|^2$ à l'aide des produits scalaires $\langle v_j, v_k \rangle$, montrer que'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|v_1 + \dots + v_n\| \leq C\sqrt{n}$.
3. En déduire le résultat suivant (Banach–Sacks) : Si $u_n \rightarrow u$ alors on peut extraire de (u_n) une suite (v_n) telle que $\frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n) \rightarrow u$.

Exercice 14.12 Soit S un ensemble d'un espace de Hilbert H . Montrer que S est borné si et seulement si

$$\forall h \in H \quad \exists C_h > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall g \in S \quad |\langle h, g \rangle| \leq C_h.$$

Exercice 14.13 Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe, avec produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et norme notée $\|\cdot\|$. Soit \mathcal{G} un sous-espace dense dans \mathcal{H} , et soit T une application linéaire continue T de \mathcal{H} dans \mathcal{H} .

- 1) Vérifier l'identité de polarisation suivante :

$$4\langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle - i\langle T(ix+y), (ix+y) \rangle + i\langle T(ix-y), (ix-y) \rangle.$$

- 2) Montrer que

$$\|T\| = \sup_{x, y \in \mathcal{G}, \|x\| = \|y\| = 1} |\langle Tx, y \rangle|.$$

- 3) L'opérateur T est dit *auto-adjoint* si pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ on a $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. Montrer que pour les opérateurs auto-adjoints, on a

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{G}, \|x\| = 1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

- 4) L'opérateur T est dit positif si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Dans ce cas on écrit $T \geq 0$, et $T \geq S$ si $T - S \geq 0$, pour S une autre application linéaire continue de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . Montrer que tout opérateur positif est auto-adjoint.

- 5) Si T est positif, montrer que T^n est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 6) Vérifier que tout projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{H} est un opérateur positif.

Exercice 14.14 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, tel que $\langle Tx, x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$. Peut-on conclure que $T = 0$? (Distinguer le cas d'un espace de Hilbert réel ou complexe).

Exercice 14.15 (Opérateurs d'Hilbert-Schmidt) Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de H . On dit que T est un opérateur d'Hilbert-Schmidt lorsque

$$\|T\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

1. Soit $T^* \in \mathcal{L}(H)$ l'adjoint (hilbertien) de T , défini par la relation $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pour tout $x, y \in H$. Montrer que l'on a $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. Montrer que $\|T\|_2$ est indépendante du choix de la base orthonormée de H choisie.
2. Soit P_F la projection orthogonale sur le sous-espace fermé F . Calculer $\|P_F\|_2$.
3. Montrer que pour $S, T \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$\|S\| \leq \|S\|_2, \quad \|ST\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2, \quad \|TS\|_2 \leq \|S\| \|T\|_2.$$

Conclure que l'ensemble des opérateurs d'Hilbert–Schmidt est un idéal dans l'ensemble des opérateurs linéaires bornés.

4. (Un exemple) Soit $H = \ell^2$, $h: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\|h\|_{\ell^2(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,m=1}^{\infty} |h(n,m)|^2 < \infty$. Pour $f \in \ell^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $K(f)(n) = \sum_{m=1}^{\infty} h(n,m)f(m)$.
 - (a) Montrer que $K \in \mathcal{L}(H)$ et $\|K\| \leq \|h\|_{\ell^2(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)}$.
 - (b) Calculer $\|K\|_2$.

Exercice 14.16 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Etudier la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x-k)$. Même question dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 14.17 Calculer

$$M := \inf_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

Exercice 14.18 (Base de Haar dans $L^2([0, 1])$). Soit $\psi = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}]} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1]}$. Pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \dots, 2^j - 1$, on considère l'intervalle dyadique $\Delta_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$ et on pose $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$. On pose ensuite $e_n = \psi_{j,k}$, où $n = 2^j + k$ (avec $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \dots, 2^j - 1$) et $e_0 = \mathbf{1}_{[0,1]}$.

1. Démontrer que le système $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonal dans $L^2([0, 1])$
2. Démontrer que $\text{Vect}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est l'espace des fonctions à escalier, constantes sur les intervalles dyadiques $\Delta_{j,k}$.
3. Conclure que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour $L^2([0, 1])$.

Exercice 14.19 Soit $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1, 1]$.

1. Montrer que $P_n \in L^2(-1, 1]$ est orthogonal à tout polynôme de degré $\leq n - 1$.
2. Montrer qu'il existe des constantes c_n , $n \in \mathbb{N}$, telles que la base orthonormale obtenue en appliquant le procédé de Gram–Schmidt au système $\{1, x, x^2, \dots\}$ est $\{c_n P_n : n \in \mathbb{N}\}$.
(Indication : on pourra admettre que $\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2^{2n} (n!)^2 \cdot \frac{2}{2n+1}$).

Exercice 14.20 (L'espace de Sobolev H^1 sur un intervalle) On note

$$H^1 = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \exists g \in L^2([0, 1]) \text{ tq } \forall x \in [0, 1], f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt \right\}.$$

- a) Montrer que si $f \in H^1$, l'élément $g \in L^2([0, 1])$ associé à f est unique. On notera désormais f_1 la fonction associée à f .
- b) On pose alors, $\forall (f, g) \in H^1 \times H^1$,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f_1(t)g_1(t)) dt.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur H^1 . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

c) Soit $f \in H^1$. Montrer que pour tout $x, y \in [0, 1]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f_1\|_2.$$

d) En déduire que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_2 + \|f_1\|_2$, et que $\|\cdot\|$ est plus fine que $\|\cdot\|_\infty$.

e) Montrer que $(H^1, \|\cdot\|)$ est complet. Il en résulte que H^1 est un espace de Hilbert.

15 Espaces L^p

Exercice 15.1 Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré σ -fini. Soit $1 \leq p < q \leq \infty$. Démontrer que les affirmations suivantes sont équivalentes

1. $\mu(X) < \infty$.
2. $L^q(X) \subset L^p(X)$.
3. $L^q(X) \subset L^p(X)$ et l'inclusion est continue.

Exercice 15.2 (espaces ℓ^p à poids) Soit $w = (w_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs (on appellera w un poids). Soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit q son exposant conjugué, c'est-à-dire, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ avec la convention $q = 1$ si $p = \infty$ et $q = \infty$ si $p = 1$. On définit $\ell^\infty(w)$ comme étant l'ensemble des suites bornées $x := (x_n)_{n \geq 1}$ de nombres complexes et pour p fini on définit $\ell^p(w)$ comme étant l'ensemble des suites telles que $\sum_{n \geq 1} |x_n|^p w_n$ est fini. On définit $N_\infty(x)$ par $N_\infty(x) = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ et $N_p(x) = \left(\sum_{n \geq 1} |x_n|^p w_n \right)^{1/p}$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

1. Montrer que, pour $1 \leq p \leq \infty$, $\ell^p(w)$ muni des opérations usuelles sur les suites est un espace vectoriel.
2. Pour $p \in [1, \infty[$, montrer que N_p est une norme sur $\ell^p(w)$.
3. Montrer que si $p \in [1, +\infty[$ et $w_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, $(\ell^p(w), N_p)$ est un espace de Banach.
4. Montrer que si $p \in [1, \infty[$, pour $x \in \ell^p(w)$ et $y \in \ell^q(w)$, on a

$$xy \in \ell^1(w) \text{ et } N_1(xy) \leq N_p(x)N_q(y).$$

5. Supposons $p \leq q$.

- (a) Montrer que si $\sum_{n \geq 1} w_n < \infty$ alors $\ell^q(w) \subset \ell^p(w)$ en comparant $N_p(x)$ et $N_q(x)$.
- (b) Montrer que s'il existe $\delta > 0$ tel que $w_n \geq \delta$ alors $\ell^p(w) \subset \ell^q(w)$.

Exercice 15.3 (Espaces de Lorentz) Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable. On considère la fonction $F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$, définie par

$$F(t) = |\{x \in X : |f(x)| > t\}|.$$

Soit $1 \leq p < \infty$.

1. Montrer que $\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F(t) d\mu$.
2. On note $L^{p, \infty}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions mesurables $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (quotienté par la relation d'équivalence p.p.) telles que

$$\|f\|_{p, \infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t > 0} t F(t)^{1/p} < \infty.$$

Montrer que $L^p \subset L^{p, \infty}$.

3. Observer que l'inclusion est stricte (considérer la fonction $x \mapsto |x|^{-n/p}$).

4. Démontrer que $\|\cdot\|_{p,\infty}$ est une *quasi-norme*, autrement dit, elle vérifie les propriétés de nullité, d'homogénéité, et la "quasi-égalité triangulaire" : $\exists C > 0 \ \|f + g\| \leq C(\|f\| + \|g\|)$.
(Indication : $|f(x) + g(x)| > t \Rightarrow |f(x)| > \frac{t}{2}$ ou $|g(x)| > \frac{t}{2}$).

Définition. Un *espace vectoriel topologique* est un couple (V, \mathcal{T}) , où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et \mathcal{T} est une topologie séparée sur V , telle que la somme $V \times V \rightarrow V$ et le produit par un scalaire $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ sont deux applications continues.

Exemples : (i) tout e.v.n est un espace vectoriel topologique avec la topologie induite par la norme. (ii) L'espace des fonctions continues sur un ouvert $C(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique (non normable) avec la topologie induite par la distance d (voir la section 3). (iii) Tout e.v.n. muni de sa topologie faible. (iv) Les espace L^p avec $0 < p < 1$ sont des espaces vectoriels topologiques (mais la topologie n'est pas issue d'une norme).

Exercice 15.4 (Les espaces $L^p([0, 1])$, $0 < p < 1$). Pour $0 < p < 1$ et $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue mesurable, on note $\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(t)|^p dt$.

- Démontrer que $L^p([0, 1])$ est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_p$ est une quasi-norme.
- Montrer que $(f, g) \mapsto \|f - g\|_p^p$ définit une distance sur $L^p([0, 1])$ et que cette distance donne à $L^p([0, 1])$ la structure d'espace vectoriel topologique.
- Démontrer qu'avec cette distance $L^p([0, 1])$ est complet.
- Soit $f \in L^p([0, 1])$ et $r > 0$. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions $g_1, \dots, g_n \in L^p([0, 1])$ telles que

$$f = \frac{1}{n}(g_1 + \dots + g_n), \quad \text{et} \quad \forall k, \|g_k\|_p^p < r.$$

(Indication : poser $g_k = nf(x)\mathbf{1}_{I_k}$ où I_k est un intervalle de $[0, 1]$ bien choisi).

- En déduire de la question précédente que tout convexe C , avec $C \neq L^p([0, 1])$, est d'intérieur vide.
- On définit comme d'habitude $(L^p)^*$ comme l'espace de toutes les applications $f: L^p([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ linéaires et continues. Déduire de la question précédente que $(L^p)^* = \{0\}$.

Exercice 15.5 Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, on pose $\tau_h f = f(\cdot - h)$. Soit $1 \leq p < \infty$. Démontrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

16 Convolution et approximations de l'identité

Définition. Une approximation de l'identité est une famille $(\phi_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ telle que $\phi_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi_\epsilon \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon = 1$, et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} \phi_\epsilon = 0$ pour tout $\delta > 0$.

Exemple. Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ alors $\phi_\epsilon = \epsilon^{-n} \phi(\cdot/\epsilon)$ est une approximation de l'identité.

Exercice 16.1 (Théorème d'approximation) Soit (ϕ_ϵ) une approximation de l'identité.

- Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\phi_\epsilon * f \xrightarrow{L^1} f$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. (On pourra utiliser l'exercice précédent).
- Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\phi_\epsilon * f$ est continue et que $\phi_\epsilon * f \rightarrow f$ uniformément dans \mathbb{R}^n pour $\epsilon \rightarrow 0$.
- Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\phi_\epsilon * f \xrightarrow{L^p} f$ pour $\epsilon \rightarrow 0$.

Exercice 16.2 Soit f une fonction localement intégrable dans \mathbb{R}^n . Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f = 0$ p.p. (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et $\forall r > 0$, $\int_{B(x,r)} f = 0$ (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 16.3 (L'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^n) Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u|_{t=0} = f, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Ici $f = f(x)$, où $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est une fonction donnée ($1 \leq p < \infty$) et l'inconnue $u = u(x, t)$ exprime la température au point x et à l'instant t .

1. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, $K_t(x) = \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{(4\pi t)^{n/2}}$. Vérifier que $(x, t) \mapsto K_t(x, t)$ est solution de l'équation de la chaleur dans $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ (cette solution est dite "solution fondamentale").

2. Justifier les identités dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$:

$$\partial_t(K_t * f) = (\partial_t K_t * f) \quad \text{et} \quad D_{x_j}^m(K_t * f) = (D_{x_j}^m K_t * f), \quad (m = 1, 2).$$

3. En déduire que $u = K_t * f$ est solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$.

4. Vérifier que $(K_t)_{t>0}$ est une approximation de l'identité pour $t \rightarrow 0$. En déduire que $u(\cdot, t) \xrightarrow{L^p} f$ pour $t \rightarrow 0$ (ceci permet de donner un sens à la condition $u|_{t=0} = f$). Montrer que si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ alors $u(x, t) \rightarrow f(x)$ pour $t \rightarrow 0$, uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition (produit de convolution dans le tore). On note $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 2π -périodiques $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et intégrables dans $[0, 2\pi)$, normé par $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)| d\theta$. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on définit $f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt$. On définit ensuite (comme dans \mathbb{R}^n) les approximations de l'identité (ϕ_ϵ) dans le tore.

Remarque. Les inégalités de Young et le théorème d'approximation restent valables dans le tore avec les mêmes démonstrations.

Exercice 16.4 (Le problème de Dirichlet pour le Laplacien dans le disque) On se propose de trouver une fonction v , harmonique dans l'intérieur du disque $\{x \in \mathbb{R}^2: |x| < 1\}$ (c'est à dire, v de classe C^2 et $\Delta v = 0$), telle que $v|_{\{x: |x|=1\}} = g$, où g est une fonction donnée sur le cercle.

Pour $0 \leq r < 1$, et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$.

1. Démontrer que

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}.$$

2. Démontrer que P_r est une approximation de l'identité pour $r \rightarrow 1$ (c'est à dire, $\phi_\epsilon = P_{1-\epsilon}$ est une approximation de l'identité).

3. On considère l'opérateur différentiel $L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$. Vérifier que $LP_r = 0$.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On pose $u(r, \theta) = P_r * f(\theta)$. Vérifier que $Lu = 0$ et que $u(r, \theta) \rightarrow f(\theta)$ pour $r \rightarrow 1$ dans $L^1(\mathbb{T})$. Que peut-on dire de plus si f est continue sur le cercle ?

5. Conclure.

17 Opérateurs compacts

Exercice 17.1 Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur d'Hilbert-Schmidt. Démontrer que T est un opérateur compact.

Exercice 17.2 Soit $T \in \mathcal{L}(L^2(0, \infty))$ l'opérateur défini par $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

1. Démontrer que $\|T\| \leq 2$.

(*Indication* : montrer que $(\int_0^x |f(t)| dt)^2 \leq 2x^{1/2} \int_0^x |f(t)|^2 t^{1/2} dt$ et appliquer Fubini).

2. Démontrer que T n'est pas compact.

Exercice 17.3 Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur compact. Démontrer que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est compact. (*Indication* : Soit (v_n) une suite bornée de F^* et $K = \overline{T(B_E(0, 1))}$. En appliquant le théorème d'Ascoli à la suite $(v_n|_K)$ montrer que l'on peut extraire de (T^*v_n) une suite de Cauchy).

Démontrer que si T^* est compact, alors T est compact.

Exercice 17.4 Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur compact. Montrer que $x_n \rightarrow x \Rightarrow Tx_n \rightarrow Tx$

(*Indication* : On rappelle que toute suite faiblement convergente est bornée).