Analyse

Master M1 année 2008-2009

Johannes Kellendonk
rédigé par Johann Rut

version 22 décembre 2008

Table des matières

I Théorie des ensembles . . . 4
- I.1 Axiome du choix . . . 4
- I.2 Ensembles ordonnés . . . 4
- I.3 Théorème de Baire . . . 5

II Topologie . . . 7
- II.1 Espaces topologiques . . . 7
- II.2 Topologie faible . . . 7
- II.3 Continuité . . . 10
- II.4 Critères de compacité . . . 13

III Espaces de Banach . . . 17
- III.1 Le dual de E . . . 18
- III.2 Topologie faible sur un espace normé . . . 21
- III.3 Le Bidual et la topologie $*$-faible sur le dual . . . 23
- III.4 Espaces réflexifs . . . 25
- III.5 Principe de la majoration uniforme (Théorème de Banach-Steinhaus) . . . 32
- III.6 Théorème de l'application ouverte . . . 33

IV Espaces de Hilbert . . . 35
- IV.1 Espaces séparables . . . 41
- IV.2 Dualité des espaces de Hilbert . . . 43
- IV.3 L'adjoint d'une application $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . . . 45

V Complétion des espaces métriques . . . 47

VI Espaces L^p . . . 50
- VI.1 Définition et proprietés des espaces L^p . . . 55
- VI.2 Densité des fonctions continues à support compact . . . 58
- VI.3 Produit de convolution . . . 59
- VI.4 Approximation par des fonctions lisses . . . 60

VII Opérateurs compacts et opérateurs de Fredholm . . . 62
- VII.1 Opérateurs compacts . . . 62
- VII.2 Opérateurs de Fredholm . . . 64

I Théorie des ensembles

I.1 Axiome du choix

Définition 1 :
Soit I un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles non vides.

$$\prod_{i\in I} X_i = \{\varphi : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \quad | \quad \varphi(i) \in X_i\}$$

C'est une généralisation du produit cartésien qui correspond au cas où I est fini.
Si $\forall i \quad X_i = X,$ *Alors* $\prod_{i\in I} X_i = X^I = \{\varphi : I \longrightarrow X\}$
Un élément de $\prod_{i\in I} X_i$ *est appelé une fonction de choix.*

Proposition 1 (Axiome du choix):
$\forall (X_i)_{i\in I}$ *telle que* $I \neq \varnothing$ *et* $\forall i \in I \; X_i \neq \varnothing$

$$\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$$

Remarque :
L'axiome du choix à pour conséquence le paradoxe de Banach-Tarski qui permet à partir d'une boule de $\mathbb{R}^3$ découpée en un nombre infini de morceaux transformés isométriquement, d'assembler deux boules disjointes de même volume que la première. Les morceaux sont des ensembles non-mesurables.

I.2 Ensembles ordonnés

Définitions :

- *Un ordre sur un ensemble X est une relation $\leq$ qui satisfait*
  1. $\forall x \in X \; x \leq x,$
  2. $x \leq y$ *et* $y \leq x$ *implique* $x = y,$
  3. $x \leq y$ *et* $y \leq z$ *implique* $x \leq z.$
- $(X, \leq)$ *est un ensemble dit ordonnné.*
- *L'ordre est dit total si tous les éléments sont comparables, ie. si* $\forall x, y \in X, \quad x \leq y$ *ou* $y \leq x.$
- *Si X est ordonné et $Y \subset X$ alors Y est aussi ordonné par restriction de cet ordre.*

Exemples :

- $\subset$ est un ordre sur $\mathcal{P}(X)$ qui n'est pas total.
- $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$.

Définitions :

- $a \in X$ *est un majorant*[1] *de* $Y \subset X$
  $\Longleftrightarrow \forall y \in Y, \quad y \leq a.$
  Si Y contient un majorant celui est unique est appellé le maximum de Y.

[1]anglais : upper bound

- *$a \in Y$ est un élément maximal de $Y \subset X$*
  $\Longleftrightarrow \forall y \in Y, \quad y \geq a$ implique $y = a$.
- *Y admet une borne supérieure (supremum) si ses majorants ont un minimum. Dans ce cas le minimum des majorants est (l'unique) supremum de Y :*
  $\sup Y = \min\{a \in X | \forall y \in Y : y \leq a\}$.

Exemples :

- $(X, \leq)$ avec X fini et $Y \subset X \Longrightarrow$ il existe des minima et maxima.
- $(X, \leq)$ avec X quelconque non vide et $\leq$ trivial (ie. x est seulement comparable avec x)
  $\Longrightarrow \forall x \in X, \quad x$ est à la fois élément maximal et élément minimal.
  Si $|X| > 1$ alors X n'est pas majoré $\Longrightarrow$ ni min/max, ni sup/inf.

Définition 2 :
Soit $(X, \leq)$. L'ordre $\leq$ est inductif si toute partie non-vide $Y \subset X$ totalement ordonnée est majorée.

Exemples :

- $X \neq \varnothing$ quelconque muni d'un ordre trivial. Toute partie $Y \subset X$ non vide totalement ordonnée est un singleton
  $\Longrightarrow$ L'ordre trivial est inductif.
- $(X, \leq)$ pour X fini est toujours inductif.

Lemme (de Zorn):
$(X, \leq)$ avec l'ordre $\leq$ inductif $\Longrightarrow X$ admet un élément maximal.

La demonstration du lemme de Zorn, qui fait normalement partie d'un cours sur la théorie des ensembles en logique, est trop longue pour ce cours. Voir "Serge Lang, Real and functional analysis (Springer)" pour une preuve de ce lemme à l'aide d'un théormème de Bourbaki utilisant l'axiome du choix (sans le dire explicitement). Le lemme de Zorn est en effet équivalent à l'axiome du choix.

I.3 Théorème de Baire

Définition 3 :
Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit de Baire lorsque $\forall (U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ tels que $\forall i \in I, \quad \overline{U_i} = X$ (ouverts denses dans X) et I dénombrable, on a

$$\overline{\bigcap_{i \in I} U_i} = X.$$

Remarque :
$\bigcap_{i \in I} U_i$ n'est pas forcément un ouvert. Il l'est en revanche lorsque I est fini.
De plus, par passage aux complémentaires on a la définition équivalente : $\forall (F_i)_{i \in I}$ tels que $\complement_X F_i \in \mathcal{T}$ et $\mathring{F_i} = \varnothing$, on a

$$\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i \in I} F_i}} = \varnothing$$

Corollaire 1 :
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Baire et $(F_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de fermés.
Si $\bigcup_{i \in I} F_i$ contient un ouvert, alors $\exists i_0 \in I$ tel que F_{i_0} contient un ouvert.

Théorème 1 (de Baire):
Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Démonstration :
Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}, \quad \overline{U_i} = X$.
Soit $\omega \subset X$ un ouvert. On va montrer que $\omega \cap \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i\right) \neq \varnothing$. Ainsi on aura $\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i$ dense dans X.

ω est ouvert, donc $\exists x_0 \in \omega$ et $r_0 > 0$ tels que $\bar{B}(x_0, r_0) = \{x \in X \quad | \quad d(x, x_0) \leq r_0\} \subset \omega$.
$\overline{U_0} = X$ donc $\varnothing \neq \underbrace{B(x_0, r_0) \cap U_0}_{ouvert} = \omega_0$ (on note $B(x_0, r_0) = \{x \in X \quad | \quad d(x, x_0) < r_0\}$).

ω_0 est ouvert, donc $\exists x_1 \in \omega_0$ et $0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$ tels que $\bar{B}(x_1, r_1) \subset \omega_0$.
$\overline{U_1} = X$ donc $\varnothing \neq \underbrace{B(x_1, r_1) \cap U_1}_{ouvert} = \omega_1$

$\vdots$

ω_{n-1} est ouvert, donc $\exists x_n \in \omega_{n-1}$ et $0 < r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$ tels que $\bar{B}(x_n, r_n) \subset \omega_{n-1}$.
On a $(x_n) \subset X$ tel que $(x_n) \subset \bar{B}(x_0, r_0)$. De plus, pour $n > m > N$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \qquad (1) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \frac{r_m}{2} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{2} \\ &\leq \frac{r_N}{2^{m-N}} + \cdots + \frac{r_N}{2^{n-1-N}} \\ &\leq r_N \sum_{i=m-N}^{n-1-N} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &\leq r_N \end{aligned}$$

(x_n) est donc une suite de Cauchy. $(x_n) \subset \bar{B}(x_0, r_0) \subset \omega \subset X$, or X est complet donc (x_n) converge vers un point $x \in \bar{B}(x_0, r_0)$. On a
$\forall N \quad \bar{B}(x_0, r_0) = \bigcap_{n=0}^{N} \bar{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n=0}^{N} U_n$.
Donc $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$, ie. $\omega \cap \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i\right) \neq \varnothing$.

$\diamondsuit$

Pour le choix de la suite $(x_n)_n$ on a utilisé une version de l'axiome du choix dite "conditionée et dénombrable", dénombrable car ce n'est qu'une suite et non une fonction définie sur un ensemble I quelconque, conditionée car le choix de x_n dépend du choix de x_{n-1}. On peut s'apercevoir qu'un choix conditioné et dénombrable peut être obtenu à partir d'un choix quelconque sans conditions.

II Topologie

II.1 Espaces topologiques

Définition 4 :
$(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique
$\Longleftrightarrow X$ est un ensemble, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ est un ensemble de parties de X telles que :

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

(ii) l'ensemble est stable par intersection finie

(iii) l'ensemble est stable par union quelconque

$U \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow U$ est un ouvert de X pour la topologie $\mathcal{T}$.

Exemple :
L'intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas forcément un ouvert :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\} \text{ n'est pas un ouvert.}$$

Définition 5 :
$f : (X_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{T}_2)$ est continue
$\Longleftrightarrow \forall U_2 \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(U_2) = \{x \in X_1 \quad | \quad f(x) \in U_2\} \in \mathcal{T}_1$.

II.2 Topologie faible

Définition 6 :
La topologie engendrée par une famille d'ouverts B est la plus petite famille contenant B et formant une topologie. On la note $\mathcal{T}(B)$.

Définition 7 :
Soient X un ensemble et $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.
(f_i) une famille d'applications telles que $f_i : X \longrightarrow Y_i$.
La topologie faible $(f_i, Y_i, \mathcal{T}_i)$ est la topologie engendrée par les ensembles $f^{-1}(U_i), \quad U_i \in \mathcal{T}_i, i \in I$.

Définition 8 :
Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X et $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
On dit que $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$.

Exemples :
$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X\}$ la topologie triviale.
$\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$ la topologie discrète.
Rappels : Une suite (x_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans X. Un voisinage de x est une partie V de X qui contient un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.
$x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_x, \exists N_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_V \quad x_n \in V$.
Sur $\mathcal{T}_1$ toute suite converge vers tout point.
Sur $\mathcal{T}_2$ une suite converge ssi elle devient constante.

Définition 9 :
Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{\varphi : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i : \varphi(i) \in X_i\} = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

Soit la projection sur le $i^{ème}$ facteur

$$\begin{array}{rccc} p_i : & X & \longrightarrow & X_i \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi(i) \end{array}$$

La topologie faible définie par $(p_i, X_i, \mathcal{T}_i)$ est appelée la topologie produit sur X.

Remarque :
Elle est engendrée par $p_i^{-1}(U_i) = U_i \times \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} X_j$.

$p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ est un ouvert.

$$p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) = \begin{cases} U_{i_1} \times U_{i_2} \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i_1, i_2}} X_j & \text{si } i_1 \neq i_2 \\ (U_{i_1} \cap U_{i_2}) \times \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i_1}} X_j = p_{i_1}^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2}) & \text{si } i_1 = i_2 \end{cases}$$

Ainsi, la topologie produit sur $X = \prod_{i\in I} X_i$ est

$$\tau = \left\{\text{union d'ensembles de la forme } U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \prod_{\substack{j\in I\\ j\neq i_1,\dots,i_n}} X_j : \quad U_{i_k} \in \tau_k\right\}$$

Définition 10 :
Soit X un espace topologique. On dit que X est compact si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

On ne demande pas que X soit séparé, comme c'est dans beaucoup de livres francais.

Définition 11 :
Une famille $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifie la propriété d'intersection finie (PIF)
Si $\forall J \subset I$ fini, $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \varnothing$.

Proposition 2 :
L'espace topologique X est compact
$\Longleftrightarrow \forall (F_i)_{i\in I}$ *famille de fermés vérifiant PIF, on a* $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons X compact. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une collection de fermés vérifiant la propriété PIF.
Supposons par l'absurde que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$. Alors $\bigcup_{i\in I} \complement_X F_i = X$.
ie. $(\complement_X F_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X. Or X compact,
donc $\exists J \subset I$ fini tel que $\bigcup_{j\in J} \complement_X F_j = X$

Autrement dit, $\bigcap_{j\in J} F_j = \varnothing$. Contradiction avec PIF.

Donc $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par contraposée supposons X non compact. Alors il existe une famille d'ouverts couvrante $(U_i)_{i\in I}$ dont aucune sous-famille finie ne recouvre X

$\forall J \subset I$ fini $\bigcup_{i\in J} U_i \neq X \overset{\complement_X}{\Longleftrightarrow} \forall J \subset I$ fini $\bigcap_{i\in J} \complement_X U_i \neq \varnothing$

Donc $(\complement_X U_i)_{i\in I}$ vérifie la propriété PIF. Or $\bigcup_{i\in I} U_i = X \overset{\complement_X}{\Longleftrightarrow} \bigcap_{i\in I} \complement_X U_i = \varnothing$.

$\diamondsuit$

Remarque :
Autre démonstration, par équivalence :
$\forall (F_i)_{i\in I}$ famille de fermés vérifiant PIF, on a $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$

$\Longleftrightarrow \forall (F_i)_{i\in I}$ famille de fermés telle que $\forall J \subset I$ fini et $\bigcap_{i\in J} F_i \neq \varnothing$, on a $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \varnothing$

$\overset{contrapose}{\Longleftrightarrow} \forall (F_i)_{i\in I}$ famille de fermés telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, $\exists J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing$

$\overset{\complement_X}{\Longleftrightarrow} \forall (\complement_X F_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts telle que $\bigcup_{i\in I} \complement_X F_i = X$, $\exists J \subset I$ fini tel que $\bigcup_{i\in J} \complement_X F_i = X$

$\Longleftrightarrow \forall (U_i)_{i\in I} = (\complement_X F_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert de X, il existe un sous recouvrement fini.

$\Longleftrightarrow X$ est compact.

Théorème 2 (de Tychonoff):
Si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille d'espaces topologiques compacts, alors $X = \prod_{i\in I} X_i$ est compact pour la topologie produit.

Démonstration :
Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts.
Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de X vérifiant la propriété PIF. Il suffit de montrer que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$.

Soit $\chi = \{A \subset \mathcal{T}(X) : \quad \mathcal{F} \subset A, \quad A \text{ vérifiant PIF}\}$
$(\chi, \subset)$ est un ensemble ordonné. Montrons qu'il est inductif.
Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de χ. $\quad \forall \beta \in \Omega, \quad \mathcal{F}_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{F}_\alpha$.

Montrons tout d'abord que $\bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{F}_\alpha$ vérifie PIF. Soient $F_1, \cdots, F_n \in \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{F}_\alpha$.

$\forall k\, \exists \alpha_k$ tel que $F_k \in \mathcal{F}_{\alpha_k}$ donc $F_1, \cdots, F_n \in \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{\alpha_k} = \max_k \{\mathcal{F}_{\alpha_k}\} \in \chi$.

(car $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta \Longrightarrow \mathcal{F}_\alpha \bigcup \mathcal{F}_\beta = \max\{\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta\}$)

Donc $F_1 \cap \cdots \cap F_n \neq \varnothing$.

En résumé $\bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{F}_\alpha \in \chi$. Donc $\bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{F}_\alpha$ majore $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, d'où χ est inductif.

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $\mathcal{F}^* \in \chi$.
On regarde $p_i : X \longrightarrow X_i$ à i fixé et $(\overline{p_i(F)})_{F\in\mathcal{F}^*}$. C'est une famille de fermés donc compacts dans X_i.
Montrons que $(\overline{p_i(F)})_{F\in\mathcal{F}^*}$ vérifie la propriété PIF. Soient $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}^*$. Alors $F_1 \cap \cdots \cap F_n \neq \varnothing$.
Donc $\varnothing \neq p_i(F_1 \cap \cdots \cap F_n) \subset p_i(F_1) \cap \cdots \cap p_i(F_n) \subset \overline{p_i(F_1)} \cap \cdots \cap \overline{p_i(F_n)}$.
X compact donc $\displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}^*} \overline{p_i(F)} \neq \varnothing$.
Soit $x = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in X, \quad x_i \in \displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}^*} \overline{p_i(F)}$
On va maintenant montrer que $\forall F \in \mathcal{F}^*$ on a $x \in F$. Ainsi on aura que $\displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}^*} F \neq \varnothing$.

$\mathcal{F}^*$ est stable par intersection finie car sinon on aurait $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}^*$ tels que $F = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} F_i \notin \mathcal{F}^*$ et alors $\mathcal{F}^* \subsetneq \mathcal{F}^* \cup \{F\}$ ce qui contredirait la maximalité de $\mathcal{F}^*$ car $\mathcal{F}^* \cup \{F\}$ vérifie la PIF. En conséquence, si un ensemble intersecte tous les éléments de $\mathcal{F}^*$ alors son union avec $\mathcal{F}^*$ vérifie PIF et donc il appartient à $\mathcal{F}^*$ (par maximilité du dernier). Soit un ouvert $U \in \displaystyle\prod_{i\in I} X_i$ contenant x. $\exists U_1, \cdots, U_n$ ouverts de $X_1, \cdots, X_n$ tels que $x \in U_1 \times \cdots \times U_n \times \displaystyle\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq 1,\ldots,n}} X_i \subset U$. Alors on a $x_i \in U_i$ pour $1 \leq i \leq n$, et $\forall F \in \mathcal{F}^*, \quad \overline{p_i(F)} \cap U_i \neq \varnothing$.

Or U_i ouvert, donc $p_i(F) \cap U_i \neq \varnothing$ ce qui est équivalent à $\exists y \in F : p_i(y) \in U_i$ où encore $\exists y \in F : y \in p_i^{-1}(U_i)$. D'où $F \cap p_i^{-1}(U_i) \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}^*$.

On a vue que ceci implique $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}^*$ pourvu que J soit fini. En particulier tout $F \in \mathcal{F}^*$ intersecte $U_1 \times \cdots \times U_n \times \displaystyle\prod_{\substack{i\in I\\ i\neq 1,\ldots,n}} X_i$ et donc aussi U. Donc $x \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}^*$ et comme les F sont fermés $\overline{F} = F$, ainsi $x \in \displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$, d'où finalement $\displaystyle\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \varnothing$.

$\diamondsuit$

Remarque :
Par construction de la topologie produit, les $p_i : X \longrightarrow X_i$ sont continues et puisque l'image d'un compact par une application continue est un compact, la réciproque est aussi vraie :
Si X est compact alors $\forall i \in I \quad X_i$ est compact.

Définition 12 :
Un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ *est localement compact*
$\Longleftrightarrow \forall x \in X, \quad \exists K \subset X$ *compact et* $U \subset K$ *ouvert tel que* $x \in U$.

II.3 Continuité

Définition 13 :
Soit $Y \subset X$. $\qquad d(x, Y) = \inf_{y\in Y} d(x, y)$. $x \mapsto d(x, Y)$ *est continue et*
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Y}$.

Lemme (d'Urysohn):
Soit (X, d) *un espace métrique et* $A, B \subset X$ *deux fermés disjoints.*
Alors $\exists f : X \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$ *continue telle que* $f_{|A} = 0$ *et* $f_{|B} = 1$.

Démonstration :

Soit $f : X \longrightarrow [0,1]$, $\quad f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$

$A \cap B = \varnothing, \quad A = \overline{A}, B = \overline{B} \Longrightarrow d(x,A) + d(x,B) > 0$

f est continue et $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$.

$\diamondsuit$

Remarque :

Plus généralement, ce lemme est vrai pour tout espace topologique séparé compact.

Cas particulier : $A = \{a\}, B = \{b\}$ avec $a \neq b$ et pour une topologie où les singletons sont fermés.

Définition 14 :

Soit $(X,\mathcal{T})$ *un espace topologique compact et un corps* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\mathcal{C}(X,\mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *continues*$\}$ *est un espace de Banach (* ie. *normé complet) pour* $\|\cdot\|_\infty$.

$\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$.

De plus, $(fg)(x) = f(x)g(x) \in \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *c'est donc une algèbre,* $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ *et même une algèbre de Banach.*

$\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ *est auto-adjointe (stable par conjugaison), c-à-d.* $\forall f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C}), \overline{f} \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ *où* $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$

On rapelle aussi que $f \mapsto \overline{f}$ *est antilinéaire et* $\overline{fg} = \overline{f}\overline{g}$.

Définition 15 :

$A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *sépare les points de* X

$\Longleftrightarrow \forall a,b \in X, a \neq b \quad \exists f \in A$ *telle que* $f(a) \neq f(b)$

Sur un espace séparé compact, $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *sépare les points.*

Théorème 3 :

Soit $(X,\mathcal{T})$ *compact et* $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *tel que*

- *(i)* A *est une sous-algèbre auto-adjointe*
- *(ii)* A *contient les fonctions constantes*
- *(iii)* A *sépare les points de* X

Alors A *est dense dans* $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ *pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration :

$\boxed{\text{Etape 1}}$ On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (iv) A est stable sous max et min, *c.à.c. :* $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} \in \bar{A}$).

Soient $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\exists h \in A$ telle que $h(x_1) = \alpha$ et $f(x_2) = \beta$.

En effet, par (iii) $\exists \varphi \in A$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

On pose $h(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\varphi(x)-\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}$.

$\alpha = \alpha 1 \in A$ car A contient les fonctions constantes (donc $x \mapsto 1$ en particulier) d'où $h \in A$.

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Soit $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Montrons que A est dense, c-à-d. $\forall \epsilon > 0$, $\exists g \in A \,:\, \|f-g\|_\infty < \epsilon$

$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists g \in A \,:\, \forall y \in X \;\; f(y) - \epsilon < g(y) < f(y) + \epsilon$

Fixons $\epsilon > 0$.

a) Fixons x.
$\forall y \neq x,\ \exists h_{xy} \in A$ telle que $h_{xy}(x) = f(x) = \alpha$ et $h_{xy}(y) = f(y) = \beta$
$f - h_{xy}$ est continue donc $\exists U_y \subset X$ ouvert tel que $\forall z \in U_y \quad h_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$
On prend un tel ouvert $\forall y \in X$, ce qui nous donne $(U_y)_{y \in X}$ un recouvrement ouvert de X.
Par compacité de X, $\quad \exists (U_{y_i})_{1 \leq i \leq n} \subset (U_y)_{y \in X}$ tel que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = X$
On pose $h_x = \min\{h_{xy_i} : i = 1, \ldots, n\} \in A$ d'après l'hypothèse (iv)
de plus $h_x(z) \leq h_{xy_i}(z) < f(z) + \epsilon$

b) On fait varier x.
$\forall x \in X \quad \exists h_x \in A : \forall y \in X \quad h_x(y) < f(y) + \epsilon$
$f - h_x$ est continue donc $\exists V_x \subset X$ ouvert tel que $\forall z \in V_x \quad h_x(z) > f(z) - \epsilon$
On prend un tel ouvert $\forall x \in X$, ce qui nous donne $(V_x)_{x \in X}$ un recouvrement ouvert de X.
Par compacité $\quad \exists (V_{x_j})_{1 \leq j \leq n} \subset (V_x)_{x \in X}$ tel que $\bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j} = X$.
On pose $g = \max\{h_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$ donc $\forall z \in X \quad f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$.
Donc A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sous l'hypothèse (iv).

$\boxed{\text{Etape 3}}$ Si A ne vérifie pas l'hypothèse (iv), montrons que $\overline{A}$ la vérifie.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ et $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.
Il suffit de montrer que $f \in A \Rightarrow |f| \in \overline{A}$.
Soit $f \in A$ et $c = \|f\|_\infty$.

Lemme :
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists P : [-c, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ *un polynôme tel que* $\forall t \in [-c, c] \quad \Big|P(t) - |t|\Big| < \epsilon$ *(Autrement dit la fonction valeur absolue est limite uniforme d'une suite de polynômes).*

D'après ce lemme, $\forall x \in X \quad \Big|P(f(x)) - |f(x)|\Big| < \epsilon \iff \Big\|P(f) - |f|\Big\|_\infty < \epsilon$
$P(f) = a_0 1 + a_1 f + \cdots + a_n f^n \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
A est une sous-algèbre, donc $P(f) \in A$
Donc si $f \in A, \quad |f| \in \overline{A}$
Par les étapes 1 et 2 appliquées à $\overline{A}$ au lieu de A on conclue que A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Etape 4}}$ On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et A auto-adjointe.
Soit $A_{\mathbb{R}} = \{f \in A : \forall x \in X \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$.
C'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes (car elles sont dans A).
Soient $x_1 \neq x_2 \in X$. Alors $\exists f \in A : \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.
Soit $g(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$ on a $g(x_1) = 0$ et $g(x_2) = 1$
Ainsi $\exists h = \frac{1}{2}(g + \overline{g}) \in A_{\mathbb{R}}$ telle que $h(x_1) = 0 \neq 1 = h(x_2)$.
Donc $A_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. On pose $u = \Re(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi})$ et $v = \Im(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - \overline{\varphi})$
$u, v \in C(X, \mathbb{R})$ donc $\forall \epsilon > 0 \quad \exists f, g \in A_{\mathbb{R}}$ telles que $\|u - f\|_\infty < \epsilon$ et $\|v - g\|_\infty < \epsilon$.

Alors $f + ig \in A$ satisfait $\|\varphi - (f + ig)\|_\infty < 2\epsilon$
Ainsi A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$

$\diamondsuit$

Démonstration :
[du lemme] On pose $c = 1$. $(x \mapsto \sqrt{x^2 + \epsilon^2})$ converge uniformément lorsque $\epsilon \to 0$ vers $(x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
En effet, $|\sqrt{x^2 + \epsilon^2} - \sqrt{x^2}| \leq \dfrac{\epsilon^2}{\sqrt{x^2 + \epsilon^2} + \sqrt{x^2}} \leq \epsilon$.
On va donc approximer $(x \mapsto \sqrt{x^2 + \epsilon^2})$ par des polynômes sur $[-1, 1]$.
Soit $u = x^2 + \epsilon^2 - 1 \in [\epsilon^2 - 1, \epsilon^2]$, on a ainsi $\sqrt{1 + u} = \sqrt{x^2 + \epsilon^2}$ dont le développement de Taylor donne :
$\sqrt{1+u} = \sum_{k \geq 0} \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} u^k$ de rayon de convergence ≥ 1.
Notons $Q_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} u^k$ alors $Q_n \overset{unif}{\longrightarrow} (u \mapsto \sqrt{1+u})$ sur $[\epsilon^2 - 1, \epsilon^2]$
$R_n^{(\epsilon)}(x) = Q_n(x^2 + \epsilon^2 - 1) \qquad R_n^{(\epsilon)} \overset{unif}{\longrightarrow} (x \mapsto \sqrt{x^2 + \epsilon^2})$ sur $[-1, 1]$
Soit $(\epsilon_n)_n$ une suite telle que $\epsilon_n \longrightarrow 0$.

$$\text{Alors } R_n^{(\epsilon_n)} \xrightarrow[n \to \infty]{unif} (x \mapsto |x|)$$

$\diamondsuit$

II.4 Critères de compacité

Rappel :
Soit (X, d) un espace métrique.
X compact $\Longleftrightarrow$ Toute suite admet une sous-suite convergente dans X.

Remarque :
Si X est un espace topologique, alors seul le sens $\Longrightarrow$ est encore valable.

Rappel :
$A \subset \mathbb{R}^n$ compact $\Longleftrightarrow$ A est fermé et borné.

Remarque :
Ceci est faux en dimension infinie.

Rappel (Théorème de Riesz):
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Une boule fermée est compacte $\Longleftrightarrow \dim(E) < \infty$.

Corollaire 2 :
$(E, \|\cdot\|)$ *localement compact* $\Longleftrightarrow \dim(E) < \infty$.

Démonstration :

Supposons $x \in E$ admet un voisinage K compact. Alors $\exists \epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset K$.

$$\begin{aligned} K \text{ compact } &\Longrightarrow \overline{B}(x,\epsilon) \subset K \Longrightarrow \overline{B}(x,\epsilon) \text{ compact} \\ &\overset{Riesz}{\Longleftrightarrow} \dim(E) < \infty \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Définition 16 :
X est dite précompact si pour tout $r > 0$, X est recouvrable par une famille finie de boules ouvertes de rayon $r > 0$..

Lemme :
Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$
A compact $\Longleftrightarrow$ A complet et précompact.

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit A compact. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans A.
Alors $\exists(a_{n_k})$ une sous-suite convergente vers un certain $a \in A$
Comme (A_n) est de Cauchy, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, donc A est complet.
$\forall \epsilon > 0 \quad \{B(x, \epsilon) : x \in A\}$ recouvre A.
Par compacité $\exists(x_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$
c-à-d. A est précompact.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons A complet et précompact. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$.
A pré-compact $\Longrightarrow \exists(B_{1,i}(\cdot, 1))_{1\leq i\leq n}$ couvrant A.
$\exists i_0 \leq n$ tel que $|B_{1,i_0}(\cdot, 1) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\}| = \infty$.
On peut supposer sans perte de généralité que $i_0 = 1$. On prend un $y_1 \in B_{1,1}(\cdot, 1) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
$\exists(B_{\frac{1}{2},i}(\cdot, \frac{1}{2}))_{1\leq i\leq n}$ couvrant A et donc $B_{1,1}(\cdot, 1)$ *a fortiori.*
$\exists i_1 \leq n$ tel que $|B_{\frac{1}{2},i_1}(\cdot, \frac{1}{2}) \cap B_{1,1}(\cdot, 1) \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\}| = \infty$.
On suppose que $i_1 = 1$. $\exists y_2 \in B_{\frac{1}{2},1}(\cdot, \frac{1}{2}) \cap B_{1,1}(\cdot, 1) \cap \{a_n : n \geq n_0$ tel que $y_1 = a_{n_0}\}$.
Par itération, on extrait une sous-suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_k \in \bigcap\limits_{i=0}^{k-1} B_{\frac{1}{2^i},1}(\cdot, \dfrac{1}{2^i})$
(y_k) est de Cauchy. En effet $d(y_n, y_m) < \frac{1}{2^N}$ avec $n, m > N$
A complet $\Longrightarrow (y_k)$ converge vers un point de A.
Donc A est compact.

$\diamondsuit$

Définition 17 :
Soit $A \subset X$ sous-ensemble d'un espace topologique.
A est relativement compact $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ est compact.

Corollaire 3 :
Soit $A \subset X$ sous-ensemble d'un espace métrique complet.
A est relativement compact $\Longleftrightarrow$ A est pré-compact.

Démonstration :
(X,d) complet $\Longrightarrow \overline{A}$ complet
Si A admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon $r > 0$
alors $\overline{A}$ admet un recouvrement fini par des boules fermées de rayon $r > 0$ et donc $\overline{A}$ admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon $2r$

$\diamondsuit$

Définition 18 :
Soit$(X,\mathcal{T})$ un espace topologique, (E,d) un espace métrique et $\Phi \subset (\mathcal{C}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$.
Φ est équicontinue en x si
$\forall \epsilon > 0\, \exists V \in \mathcal{V}_x\, \forall f \in \Phi\, \forall y \in V\ :\ d(f(x), f(y)) < \epsilon.$

Remarque :
En particulier, f continue en $x \Longleftrightarrow \{f\}$ équicontinue en x.
Φ équicontinue $\Longleftrightarrow \Phi$ équicontinue $\forall x$.

Théorème 4 (d'Ascoli):
Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique compact et (E,d) un espace métrique complet. Soit $\Phi \subset \mathcal{C}(X,E) = \mathcal{C}_b(X,E)$.

Φ relativement compact $\Longleftrightarrow$ (i) Φ *équicontinue*
(ii) $\forall x \in X \quad \Phi(x) = \{f(x)\ :\ f \in \Phi\}$ *est relativement compact.*

Démonstration :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons (i) Φ équicontinue et (ii) $\forall x \in X \quad \Phi(x) = \{f(x)\ :\ f \in \Phi\}$ est relativement compact.
Soit $r > 0$, montrons que Φ est pré-compact. Φ équicontinue, donc pour $\epsilon = r$
$\forall x \in X \quad \exists V_x$ (qu'on peut choisir ouvert) tel que $\forall f \in \Phi,\ \forall y \in V_x \quad : d(f(x), f(y)) < r$
$(V_x)_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X.
X est compact donc il existe un sous-recouvrement fini, *i.e.* $\exists (x_i)_{1 \le i \le n} \subset X$ tel que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = X$.

$\Phi(x_i)$ est relativement compact donc $Y = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \Phi(x_i)$ aussi.

$\overset{\text{Corollaire 3}}{\Longrightarrow}$ Y est pré-compact.
Donc $\exists (a_j)_{1 \le j \le m} \subset Y :\quad \displaystyle\bigcup_{j=1}^{m} B_d(a_j, r) = Y$
Soit l'application $\sigma : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$.
On pose $\Phi_\sigma = \{f \in \Phi : \forall i = 1, \dots, n : \underbrace{d(f(x_i), a_{\sigma(i)}) < r}_{f(x_i) \in B_d(a_{\sigma(i)}, r)}\}$

$\displaystyle\bigcup_{\sigma} \Phi_\sigma = \Phi$. En effet, si $f \in \Phi$, alors $\forall i,\ f(x_i) \in Y$

Donc $\forall i \quad \exists j : f(x_i) \in B_d(a_j, r)$

Alors $\exists \sigma$ tel que $\forall i \quad f(x_i) \in B_d(a_{\sigma(j)}, r)$

D'où $f \in \Phi_\sigma$. On a bien $\Phi \subset \bigcup_\sigma \Phi_\sigma$ et l'autre inclusion est évidente.

Ainsi Φ est recouverte par les Φ_σ qui sont en nombre fini.

Montrons que $diam(\Phi_\sigma) < 4r$:

Soient $f, g \in \Phi_\sigma$ et $x \in X$. $\exists i : x \in V_{x_i}$

$d(f(x), g(x)) \leq \underbrace{d(f(x), f(x_i))}_{<r} + \underbrace{d(f(x_i), a_{\sigma(i)})}_{<r \text{ car } f \in \Phi_\sigma} + \underbrace{d(a_{\sigma(i)}, g(x_i))}_{<r \text{ car } g \in \Phi_\sigma} + \underbrace{d(g(x_i), g(x))}_{<r} < 4r$

Φ est équicontinue et $\mathcal{C}_b(X, E)$ est muni de la métrique

$$\begin{array}{rccc} D : & \mathcal{C}_b(X,E) \times \mathcal{C}_b(X,E) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (f,g) & \longmapsto & \sup_x (d(f(x), g(x)) \end{array}$$

$D(f, g) \leq 4r \Longrightarrow \Phi_\sigma \subset B_D(f, 5r)$ pour un certain $f \in \Phi_\sigma$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ce sens ce nécéssite pas l'hypothèse de compacité.

Soit Φ relativement compact et $\epsilon > 0$.

$\exists (f_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \Phi$ telle que $(*)$ $\Phi \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_D(f_k, \frac{\epsilon}{3})$

Soit $x \in X$. On pose $V = \{y \in X \, : \, \forall i \, d(f_i(x), f_i(y)) < \frac{\epsilon}{3}\}$

Par continuité de f_i V est ouvert et contient x.

De plus, $\forall f \in \Phi \quad \forall y \in V \quad \forall i \quad d(f(x), f(y) \leq \underbrace{d(f(x), f_i(x))}_{<\epsilon} + \underbrace{d(f_i(x), f_i(y))}_{<\epsilon} + \underbrace{d(f_i(y), f(y))}_{<\epsilon}$

Pour i fixé, $f \in B(f_i, \frac{\epsilon}{3})$ donc (i) Φ est équicontinue.

$(*) \Longrightarrow \Phi(z) \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_d(f_k(z), \frac{\epsilon}{3})$

Donc $\Phi(z)$ pré-compact dans $\mathcal{C}_b(X, E)$ complet, donc (ii) $\Phi(z)$ relativement compact.

$\diamondsuit$

Remarque :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$.

Prenons par exemple $U =]0, 1[$. Alors $\exists f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ non bornée : $f(x) = \frac{1}{x}$.

Pourtant $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ est quand même une algèbre.

Soit $(K_n)_n$ une suite de compacts tels que $K_n \subset K_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = U$.

Prenons par exemple $K_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$. Sur $\mathcal{C}(K_n, \mathbb{C})$, $\| \cdot \|_\infty$ existe. On définit :

$$\begin{array}{rccc} p_n : & \mathcal{C}(U, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)| \end{array}$$

Attention : $p_n(f) = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$

On a néanmoins $p_n(\lambda f) = |\lambda| p_n(f)$ et $p_n(f + g) \leq p_n(f) + p_n(g)$, donc c'est une semi-norme.

On peut définire la métrique $d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}$

Ainsi $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ est métrisable. (il est même complet. *cf.* TD)

En analyse complexe, on s'intéresse à $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U ouvert de $\mathbb{C}$.

Théorème 5 :
$\mathcal{H}(U)$ est complet pour cette métrique d.

Théorème 6 (de Montel):

$$\begin{aligned} \Phi \subset \mathcal{H}(U) \text{ relativement compact } &\Longleftrightarrow \Phi \text{ uniformément borné sur tout compact.} \\ &\Longleftrightarrow \forall K \subset U \text{ compact } \exists C > 0 \text{ telle que } \forall x \in K \quad \forall f \in \Phi \quad |f(x)| \leq C \end{aligned}$$

III Espaces de Banach

Rappel :
Un espace de Banach sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel complet pour sa norme associée $\|\cdot\|$.

Exemples :

- $(\mathcal{C}_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ pour X un espace topologique et E un espace de Banach.
- $\mathcal{C}^k([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k\}$ pour la norme $\|f\| = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|_\infty$.
  Attention : Ce n'est pas un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_\infty$!

Rappel :
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés.
Alors $\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \longrightarrow F$ linéaires continues $\}$ est normé pour

$$|||f||| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Rappel :

$$\begin{aligned} f \text{ linéaire est continue } &\Longleftrightarrow \text{ le sup existe} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ "bornée", } ie.\ f(B_{\|\cdot\|_E}(0,1)) \subset B_{|\cdot|}(0,1) \end{aligned}$$

Attention ! f n'est pas forcément bornée , $f \notin \mathcal{C}_b(E, F)$)

Rappel :
Si F est complet (ou de Banach), Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet (resp. de Banach).

Cas particuliers intéressants :

- Soient E, F, G des espaces normés. En général il existe une application (appelée composition)

$$\begin{array}{rccc} \circ : & \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ & (f_1, f_2) & \longmapsto & f_2 \circ f_1 \end{array}$$

En effet, $f_2 \circ f_1$ est continue car $\|f_2(y)\|_G \leq |||f_2||| \cdot \|y\|_F$
D'où $|||f_2 \circ f_1||| = \displaystyle\sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f_2(f_1(x))\|_G \leq \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \{|||f_2||| \cdot \|f_1(x)\|_F\} = |||f_2||| \cdot |||f_1|||$

Maintenant si $E = F$ la composition définit sur $\mathcal{L}(E, E)$ un produit associatif, distributif (par linéarité) lui donnant une structure d'algèbre associative.
De plus, $|||f_1 f_2||| = |||f_1 \circ f_2||| \leq |||f_2||| \cdot |||f_1|||$
Si E est complet alors $\mathcal{L}(E, E)$ aussi et forme ainsi une algèbre de Banach.

- Si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est toujours un espace de Banach.

III.1 Le dual de E

Définition 19 :
$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est l'espace dual (topologique) de E.

Question : A-t-on $E^* \neq \{0\}$?

Définition 20 :
Soit E une espace vectoriel réel. Une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est sous-linéaire

$$\iff \begin{array}{ll} i) & x \in E, \quad \forall t \geq 0, \quad p(tx) = tp(x) \\ ii) & x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{array}.$$

Soit E un espace K-vectoriel. Une fonction $p : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme

$$\iff \begin{array}{ll} i) & x \in E, \quad \forall \lambda \in K, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \\ ii) & x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{array}.$$

Remarque :
En particulier, une norme est une semi-norme, et une semi-norme sur un espace vectoriel réel est sous-linéaire.

Théorème 7 (Hahn-Banach version analytique):
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sous-linéaire.
*Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, et $\lambda : F \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $\lambda \leq p$ (*ie. *$\forall x, \lambda(x) \leq p(x)$)*
Alors il existe un prolongement λ^* de λ sur E (c-à-d. $\lambda^* : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda^*|_F = \lambda$) qui est linéaire et tel que $\lambda^* \leq p$.

Corollaire 4 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. $\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in E^*$, telle que $\lambda(x) \neq 0$.

Démonstration :

[du corollaire] Soit $x \in E$ et $\lambda(tx) = t\|x\|, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda : \mathbb{R}x \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire continue.

Si $p = \|\cdot\|$ alors $\lambda \leq \|\cdot\|$

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists \lambda^* \in E^*$ telle que $\lambda^*(tx) = \lambda(tx)$ et $\forall y \in E, \lambda^*(y) \leq \|y\| \iff \forall y \in E \quad |\lambda^*(y)| \leq \|y\|$.

$\diamondsuit$

Remarque :
La démonstration montre un peu plus : pour tout $x \in E$ il existe $\lambda \in E^*$ tel que $\lambda(x) = \|x\|_E$ et $\|\lambda\|_{E^*} \leq 1$.

Remarque :
$\lambda(x) \leq p(x) \Longrightarrow -\lambda(x) = \lambda(-x) \leq p(-x) \Longrightarrow -p(-x) \leq \lambda(x)$
Donc $\lambda \leq p \Longrightarrow \forall x, \quad -p(-x) \leq \lambda(x) \leq p(x)$

Démonstration :

[du théorème]

$\boxed{\text{Etape 1}}$ Soit $v \in E \setminus F$. On veut prolonger λ sur $\tilde{F} = F + \mathbb{R}v$

Pour $y \in \tilde{F}$, $\exists! x \in F$, $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + tv$. Soit $a \in \mathbb{R}$, Soit $\lambda_a : \begin{array}{ccc} \tilde{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \lambda(x) + ta \end{array}$

Soit $t \neq 0$, $\lambda_a(x + tv) = t\lambda_a(\frac{x}{t} + v) = t(\lambda(\frac{x}{t}) + a)$ car $\lambda_a(v) = a$

Question : Pour quels a a-t-on $\lambda_a \leq p$?

Soit $y \in \tilde{F}$ $\lambda_a(y) \leq p(y)$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \forall x \in F \text{ et } t > 0, \quad t(\lambda(\tfrac{x}{t}) + a) &\leq p(t(\tfrac{x}{t} + v)) \\ &= tp(\tfrac{x}{t} + v) \\ &\leq t(p(\tfrac{x}{t}) + p(v)) \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \forall x' = \frac{x}{t} \in F$, $\lambda(x') + a \leq p(x') + p(v)$

Donc pour $a = p(v)$ $\lambda_a \leq p$.

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Soit $\chi = \{(G, \tilde{\lambda}) : G$ est un sous-espace vectoriel de E contenant F, $\tilde{\lambda} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ un prolongement de λ tel que $\tilde{\lambda} \leq p\}$

On définit $(G_1, \tilde{\lambda}_1) \leq (G_2, \tilde{\lambda}_2) \Longleftrightarrow G_1 \subset G_2$ et $\tilde{\lambda}_{2|_{G_1}} = \tilde{\lambda}_1$

Montrons que $\leq$ est inductif.

Soit $(G_i, \tilde{\lambda}_i)_{i \in I}$ une famille de χ totalement ordonnée.

On pose $G = \displaystyle\bigcup_{i \in I} G_i$. C'est un espace vectoriel contenant F. Soit $\tilde{\lambda} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que si $x \in G$ alors $\exists i : x \in G_i$ et $\tilde{\lambda}(x) = \tilde{\lambda}_i(x)$. (bien définit car si $x \in G_j$ alors $G_i \subset G_j$ ou $G_j \subset G_i$ et donc $\tilde{\lambda}_i(x) = \tilde{\lambda}_j(x)$.)

Il est clair que $\forall i \in I$, $(G_i, \tilde{\lambda}_i) \leq (G, \tilde{\lambda}) \overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow} \exists (F^*, \lambda^*) \in \chi$ maximal.

Montrons que $F^* = E$. Supposons par l'absurde qu'il existe $v \in E \setminus F^*$.

D'après l'étape 1, on peut prolonger λ^* sur $F^* + \mathbb{R}v$ tel que son prolongement $\tilde{\lambda^*} \leq p$.

Donc $(F^* + \mathbb{R}v, \tilde{\lambda^*}) \in \chi$ et $(F^*, \lambda^*) \leq (F^* + \mathbb{R}v, \tilde{\lambda^*})$ de qui contredit la maximalité de (F^*, λ^*).

$\diamondsuit$

Corollaire 5 :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, $\lambda \in F^*$. On note $\|\cdot\|_{F^*}$ la norme sur F^* et $\|\cdot\|_{E^*}$ la norme sur E^*.

On pose $p(x) = \|\lambda\|_{F^*} \cdot \|x\|_E$

Alors $\exists \lambda^* \in E^*$ telle que $\lambda^*|_F = \lambda$ et $\|\lambda^*\|_{E^*} = \|\lambda\|_{F^*}$.

Remarque :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Alors l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\lambda : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est uniquement déterminée par $\mu = \Re(\lambda)$. En effet, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \Re(z) - i\Re(iz)$ donc $\lambda(x) = \mu(x) - i\mu(ix)$.

Corollaire 6 :

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Soit $p : E \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme sur E. Soit l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\lambda : F_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| \leq p$.

Alors il existe un prolongement λ^* de λ sur E qui est linéaire et tel que $|\lambda^*| \leq p$.

Démonstration :

Soit l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mu : F_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mu(x) = \Re(\lambda(x))$ et $\mu \leq p$.

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists \mu^* : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire telle que $\mu^* \leq p$.

On pose $\forall x \in E, \quad \lambda^*(x) = \mu^*(x) - \mu^*(ix)$. Donc λ^* est un prolongement linéaire de λ.

$\forall x \in E, \quad \exists a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$ tel que $a\lambda^*(x) \in \mathbb{R}$.

Mais $a\lambda^*(x) = \lambda^*(ax) = \mu^*(ax) \leq p(ax)$ et $p(ax) = |a|p(x) = p(x)$

et donc $|\lambda^*(x)| = |a\lambda^*(x)| \leq p(x)$.

$\diamondsuit$

Théorème 8 (Hahn-Banach, version géométrique):
*Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $A, B \subset E$ deux convexes non-vides disjoints (*ie. $A \cap B = \varnothing$*).*
Alors $\exists f \in E^*$ tel que $f(A) \cap f(B) = \varnothing$.

Lemme :
Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $A \subset E$ un convexe non-vide. Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sous-linéaire.
Alors $\exists f \in E^*$ tel que $f \leq p$ et $\inf\limits_{x\in A}\{p(x)\} \leq \inf\limits_{x\in A}\{f(x)\}$.

Démonstration :

[du lemme] Soit $I = \begin{cases} \inf\limits_{x\in A}\{p(x)\} & \text{si l'inf existe} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Si $I = -\infty$ alors l'inégalité est vide et un tel f existe.

Supposons $I > -\infty$. On pose $\tilde{p}(x) = \inf\limits_{x\in A}\{p(x+ty) - tI : y \in A, t \geq 0\}$

$$\begin{aligned} \text{On a } tI &\leq tp(y) && \forall t \geq 0 \quad \forall y \in A \\ &= p(ty) \\ &\leq p(x+ty) + p(-x) \end{aligned}$$

Donc $-p(-x) \leq p(x+ty) - tI$ donc $-p(-x) \leq \tilde{p}(x) \leq p(x+ty) - tI \quad \forall t$

Donc $\tilde{p}(x) \leq p(x)$ d'où $\tilde{p}(x) \in \mathbb{R}$.

Vérifions que $\tilde{p}$ est sous-linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Soit } s \geq 0 \quad \tilde{p}(sx) &= \inf\{p(sx+ty) - tI : t \geq 0, y \in A\} \\ &= \inf\{p(s(x + \tfrac{t}{s}y) - tI : t \geq 0, y \in A\} \\ &= \inf\{s(p(x + \tfrac{t}{s}y) - \tfrac{t}{s}I) : \tfrac{t}{s} \geq 0, y \in A\} \\ &= s \cdot \inf\{p(x+t'y) - t'I : t' \geq 0, y \in A\} \\ &= s \cdot \tilde{p}(x) \end{aligned}$$

Soit $(x_i)_{i=1,2} \subset E$. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists t_i \geq 0, \quad y_i \in A$ tels que $\tilde{p}(x_i) \geq p(x_i + t_iy_i) - t_iI - \epsilon$.

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x_1) + \tilde{p}(x_2) &\geq p(x_1 + t_1y_1) + p(x_2 + t_2y_2) - (t_1+t_2)I - 2\epsilon \\ &\geq p(x_1 + x_2 + t_1y_1 + t_2y_2) - (t_1+t_2)I - 2\epsilon \\ &= p(x_1 + x_2 + ty) - tI - 2\epsilon && \text{avec } t = t_1 + t_2 \text{ et } y = \tfrac{t_1y_1 + t_2y_2}{t_1+t_2} \in A \text{ car } A \text{ connexe} \\ &\geq \tilde{p}(x_1 + x_2) - 2\epsilon \end{aligned}$$

ϵ étant arbitraire, $\tilde{p}(x_1) + \tilde{p}(x_2) \geq \tilde{p}(x_1 + x_2)$

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire tel que $f \leq \tilde{p}$.

Donc $f \leq p$.

Pour $x \in A$, $y = x$ et $t = 1$, $-f(x) = f(-x) \leq \tilde{p}(-x) \leq \tilde{p}(-x+x) - I = -I$

Donc $\forall x \in A \quad I \leq f(x)$.

$\diamondsuit$

Démonstration :

[du théorème] $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ est convexe.

$\overset{\text{Lemme}}{\Longrightarrow} \exists f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire tel que $f \leq p = \|\cdot\|$ avec

$$\begin{aligned} 0 < d(A,B) &= \inf_{\substack{x\in A\\ b\in B}} \|a-b\| \\ &\underset{\text{Lemme}}{\leq} \inf_{\substack{x\in A\\ b\in B}} \{f(a-b)\} \\ &= \inf_{\substack{x\in A\\ b\in B}} \{f(a)-f(b)\} \\ &= \inf_{x\in A}\{f(a)\} - \sup_{b\in B}\{f(b)\} \end{aligned}$$

Donc $f(B) < f(A)$.

$\diamondsuit$

III.2 Topologie faible sur un espace normé

Définition 21 :

La topologie faible sur E est celle de la famille $(f, \mathbb{K})_{f\in E^*}$

C'est la topologie la moins fine (la plus petite) telle que $\forall F \in E^*$, f est continue.

$U \subset E$ est ouvert pour la topologie faible (ou faiblement ouvert)

$\Longleftrightarrow U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \right)$ *avec $n < \infty$, $f_i \in E^*$, $V_i \subset \mathbb{K}$ ouvert ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ avec la topologie usuelle euclidienne).*

La topologie faible est moins fine (plus faible) que la topologie normique. en effet, comme les elements de E^* sont continus pour la topologie normique on a que :

$U \subset E$ faiblement ouvert $\Longrightarrow U \subset E$ ouvert pour la topologie normique.

Autrement dit $\begin{array}{rccc} id : & (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (E, \tau_{faible}) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$ est continue

Lemme :

E est séparé pour la topologie faible.

Démonstration :

Soients $x \neq y \in E \overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists f \in E^* : f(x) \neq f(y)$

On pose $\epsilon = \frac{|f(x)-f(y)|}{2} > 0$. Alors $x \in U = f^{-1}(\mathring{B}(f(x), \epsilon))$ qui est donc faiblement ouvert.

De même $y \in V = f^{-1}(\mathring{B}(f(y), \epsilon))$ qui est donc faiblement ouvert.

Supposons qu'$\exists z \in U \cap V$. Alors $f(z) \in \mathring{B}(f(x), \epsilon) \cap \mathring{B}(f(y), \epsilon) = \varnothing$ ce qui est absurde.

Donc $U \cap V = \varnothing$.

$\diamondsuit$

Lemme :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x \Longleftrightarrow \forall f \in E^*$, $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{usuelle}} f(x)$

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\epsilon > 0$.

$f^{-1}(\mathring{B}(f(x), \epsilon))$ est faiblement ouvert et contient x, c'est donc un voisinage de x.

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{\text{faible}}} x$ donc $\exists N > 0$ tel que $\forall n > N, \quad x_n \in f^{-1}(\mathring{B}(f(x), \epsilon))$
Donc $\forall n > N, \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{\text{usuelle}}} f(x)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit V un voisinage de x pour la topologie faible.
Par définition, $\exists n < \infty$ tel que $(f_i)_{1\leq i\leq n} \subset E^*$ et $(V_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{K}$ ouverts tels que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subset V.$$

Donc $\forall\, 1 \leq i \leq n, \quad f_i(x) \in V_i$ qui est un voisinage de $f_i(x)$ pour la topologie usuelle.
Or $f_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{\text{usuelle}}} f_i(x)$ par hypothèse.
Donc $\exists N > 0$ tel que $\forall n > N, \quad f_i(x_n) \in V_i$
$\Longrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \quad \forall n > N, \quad f_i(x_n) \in V_i$
$\Longleftrightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \quad \forall n > N, \quad x_n \in f_i^{-1}(V_i)$
$\Longleftrightarrow \forall n > N, \quad x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i) \subset V$
Donc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{\text{faible}}} x$.

$\diamondsuit$

Remarque :
Ce lemme est valable pour toute topologie faible.

Exemple :
$l^2 = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|a\|_2 = \sqrt{\sum |a_n|^2} < \infty\}$ est un espace vectoriel normé pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Soit $\delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. $\qquad \delta_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$
Montrer que δ converge faiblement vers $(0, \dots, 0, \dots) \overset{\text{Lemme}}{\Longleftrightarrow}$ Montrer que $\forall f \in l^{2*}, \quad f(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $a' = (a_n^N)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ telle que $a' = \begin{cases} a_n & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$a' \xrightarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_2} a$ donc $f(a) = f(\lim_{N\to\infty} a') = \lim_{N\to\infty} f(a')$.
$a' = \sum_{k=0}^{N} a_k \delta_k$ donc par linéarité $f(a') = \sum_{k=0}^{N} a_k f(\delta_k)$
$\Longrightarrow \forall a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2, \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k f(\delta_k)$ existe.
Donc la suite $(f(\delta_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
En effet, supposons le contraire, $f(\delta_k) \not\longrightarrow 0$. Alors $\forall \epsilon > 0$, il existe une infinité de k tels que $|f(\delta_k)| \geq \epsilon$.
Donc $\forall \epsilon > 0, \quad \exists (\delta_{n_l})_{l\in\mathbb{N}} \subset (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f(\delta_{n_l})| \geq \epsilon$. Prenons $a_{n_l} = \dfrac{1}{l} \dfrac{\bar{f}(\delta_{n_l}}{|f(\delta_{n_l}|}$ et $a_n = 0$ ailleurs.
$\sum_n a_n f(\delta_n) = \sum_l a_{n_l} f(\delta_{n_l}) = \sum_l \dfrac{1}{l} |f(\delta_{n_l})| \geq \epsilon \sum_l \dfrac{1}{l} = \infty$. Absurde !
Donc $f(\delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

Montrons que $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour la topologie normique (engendrée par $\|\cdot\|_2$).
$\|\delta_n - \delta_m\|_2 = \|(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)\|_2 = \sqrt{2}$
Donc $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy pour $\|\cdot\|_2$. Donc les topologies ne peuvent pas être les mêmes.

Remarque :
Sur $\mathbb{R}$ la topologie faible et la topologie normique (euclidienne) coïncident.
En effet, soit $f \in \mathbb{R}^*$ *i.e.* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est linéaire et clairement continue (car linéaire sur un espace de dimension finie). $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Soit l'intervalle (ouvert pour la topologie normique) $]\frac{x-\epsilon}{a}, \frac{x+\epsilon}{a}[$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$.
On a $]x-\epsilon, x+\epsilon[= f^{-1}(]\frac{x-\epsilon}{a}, \frac{x+\epsilon}{a}[)$ faiblement ouvert (par définition).

III.3 Le Bidual et la topologie $*$-faible sur le dual

Rappel :
Soit $(E, \|\cdot\|_{E})$ un espace vectoriel normé. Alors E^* est aussi normé et $|\!|\!| f |\!|\!|_{E^*} = \sup\limits_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E = 1}} |f(x)|$.
$E^{**} = (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})$, donc E^* est muni de la topologie faible.

De plus, on va voir qu'on peut identifier E avec un sous-espace de E^{**}.

Définition 22 :

$$\begin{array}{rccc} i_x : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Lemme :
$i_x \in E^{**}$

Démonstration :
Soient $f, g \in E^*, \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$. $\qquad i_x(f+\lambda g) = (f+\lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) = i_x(f) + \lambda i_x(g)$.
Donc i_x est linéaire.
$|i_x(f)| = |f(x)| \le |\!|\!| f |\!|\!|_{E^*} \cdot \|x\|_E$ d'où $|\!|\!| i_x |\!|\!|_{E^{**}} = \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ |\!|\!| f |\!|\!|_{E^*}=1}} |i_x(f)| \le \sup\limits_{\substack{f\in E^* \\ |\!|\!| f |\!|\!|_{E^*}=1}} \|x\|_E = \|x\|_E$
Donc i_x est continue.

$\diamondsuit$

Définition 23 :

$$\begin{array}{rccc} i : & E & \hookrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & i_x \end{array}$$

Lemme :
i est une isométrie linéaire. Ainsi E^{**} contient une "copie isométrique" de E.

Démonstration :
Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$.
$i(x+\lambda y)(f) = i_{x+\lambda y}(f) = f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = i_x(f) + \lambda i_y(f) = (i(x) + \lambda i(y))(f)$
Donc i est linéaire.
On a vu que $|\!|\!| i(x) |\!|\!|_{E^{**}} = |\!|\!| i_x |\!|\!|_{E^{**}} \le \|x\|_E$
$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists f_0 \in E^*$ telle que $|f_0(x)| = \|x\|_E$ et $|\!|\!| f_0 |\!|\!|_{E^*} = 1$.
Donc $|\!|\!| i_x |\!|\!|_{E^{**}} \ge |i_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|_E$
D'où $|\!|\!| i(x) |\!|\!|_{E^{**}} = \|x\|_E$ c-à-d i est isométrique.

$\diamondsuit$

Définition 24 :
La topologie faible sur E^* est la topologie faible de la famille E^{**}.
La topologie $*$-faible sur E^* est la topologie faible de la famille $i(E)$.

Remarque :
Elle est très utile !
La topologie $*$-faible est moins fine que la topologie faible. Comme elle contient moins d'ouverts, la compacité est plus facile à déterminer (puisqu'il y a moins de choix de recouvrements ouverts).

Lemme :
E^* est séparé pour la topologie $*$-faible.

Démonstration :
Soient $f \neq g \in E^*$.
$\exists x \in E$ tel que $f(x) \neq g(x) \Longleftrightarrow i_x(f) \neq i_x(g)$.
On pose $\epsilon = \dfrac{|i_x(f) - i_x(g)|}{2} > 0$. Alors $U = i_x^{-1}(\mathring{B}(i_x(f), \epsilon))$ est un ouvert pour la topologie $*$-faible qui contient f.
De même, $V = i_x^{-1}(\mathring{B}(i_x(g), \epsilon))$ est un ouvert pour la topologie $*$-faible qui contient g.
De plus $\mathring{B}(i_x(f), \epsilon)) \cap \mathring{B}(i_x(g), \epsilon)) = \emptyset$. Donc $U \cap V = \varnothing$.

$\diamondsuit$

Lemme :
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$ converge vers $f \in E^*$ pour la topologie $*$-faible
$\Longleftrightarrow \forall x \in E, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
$\left(\Longleftrightarrow \forall f^* \in i(E), \quad f^*(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^*(f) \quad \textit{car } \forall f^* \in i(E), \exists x \in E \textit{ tel que } f^* = i_x\right)$

Théorème 9 :
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. On note $\overline{B_1^*} = \overline{B}_{\|\cdot\|_{E^*}}(0,1)$ la boule fermée unité dans E^*.
Alors $\overline{B_1^*}$ est compacte pour la topologie $*$-faible.
Attention, pas pour la topologie normique !

Démonstration :

$\boxed{\text{Etape 1}}$

$\forall x \in E$, on pose $Y_x = \mathbb{K}$ et $\eta : \begin{array}{ccl} E^* & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{x\in E} Y_x = \{f : E \longrightarrow \mathbb{K}\} = \mathbb{K}^E \\ f & \longmapsto & f \end{array}$

η est injective : si $\eta(f) = \eta(g)$ alors $f = g$.

De plus, la toopologie induite sur $\eta(E^*)$ est la topologie $*$-faible.

Soient $(x_i)_{1\leq i\leq n} \subset E, (U_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{K}$ ouverts et $p_x : \begin{array}{ccl} \displaystyle\prod_{y\in E} Y_y & \longrightarrow & Y_x = \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Un ouvert O pour la topologie induite est de la forme $O = \bigcup \left[\eta(E^*) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} p_{x_i}^{-1}(U_i)\right)\right]$

$$
\begin{aligned}
\eta^{-1}(O) &= \bigcup \left\{ f \in E^* \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} p_{x_i}^{-1}(U_i) \right) \right\} \\
&= \bigcup \left\{ f \in E^* : f(x_k) \in U_k \quad \forall 1 \leq k \leq n \right\} \\
&= \bigcup \left\{ f \in E^* : i(x_k)(f) \in U_k \quad \forall 1 \leq k \leq n \right\} \\
&= \bigcup \bigcap_{1 \leq k \leq n} i_{x_k}^{-1}(U_k) \text{ ouvert pour la topologie *-faible.}
\end{aligned}
$$

$\eta(\overline{B_1^*}) \subset \prod_{x \in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E] = V$ car $|f(x)| \leq |\!|\!| f |\!|\!|_{E^*} \|x\|_E \leq \|x\|_E$

$[-\|x\|_E, \|x\|_E] \subset \mathbb{K}$ compact $\forall x \in E \overset{\text{Tychonoff}}{\Longrightarrow} V$ compact.

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Il suffit maintenant de montrer que $\eta\left(\overline{B_1^*}\right)$ est fermé.

Soit $f \in \overline{\eta\left(\overline{B_1^*}\right)}$.

Montrons que $f \in \eta\left(\overline{B_1^*}\right)$, ce qui revient à montrer que i) f est linéaire, ii) $|\!|\!| f |\!|\!| = 1$.

i) Soit $y, z \in E$ et $W = \{g \in V : |g(y+z) - f(y+z)| < \epsilon$ et $|g(y) - f(y)| < \epsilon$ et $|g(z) - f(z)| < \epsilon\}$. W est l'intersection de trois ouverts de V.

$$f \in \overline{\eta\left(\overline{B_1^*}\right)} \cap W \Longrightarrow \eta\left(\overline{B_1^*}\right) \cap W \neq \varnothing.$$

Soit $g \in \eta\left(\overline{B_1^*}\right) \cap W$. Alors $\forall \epsilon > 0, \quad |(g(y+z) - g(y) - g(z)) - (f(y+z) - f(y) - f(z))| < 3\epsilon$
Mais $g(y+z) - g(y) - g(z) = 0$ donc f est aussi additive. De la même manière on montre que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et ainsi que f est linéaire.

ii) Supposons que $|\!|\!| f |\!|\!| > 1$
$\Longleftrightarrow \exists x \in E$ tel que $|f(x)| > \|x\|_E$ et $\epsilon = \dfrac{|f(x)| - \|x\|_E}{2} > 0$
Donc $|f(x)| = \|x\|_E + 2\epsilon$. Soit l'ouvert $W' = \{g \in V : |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$.
$W' \cap \eta\left(\overline{B_1^*}\right) \neq \varnothing$. Soit $g \in W' \cap \eta\left(\overline{B_1^*}\right) \qquad |f(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \epsilon + \|x\|_E$
car $\|g\| \leq 1$. Donc $\|x\|_E + 2\epsilon \leq \epsilon + \|x\|_E$. Absurde !
Donc $|\!|\!| f |\!|\!| = 1$.

Donc $f \in \eta\left(\overline{B_1^*}\right)$ d'où $\overline{\eta\left(\overline{B_1^*}\right)} = \eta\left(\overline{B_1^*}\right)$

Donc $\eta\left(\overline{B_1^*}\right)$ est fermé dans un compact donc compact.

$\diamondsuit$

Remarque :
Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach de dimension infinie, alors $\overline{B_1}$ n'est pas compact (d'après Riesz). En revanche si E est le dual d'un certain espace normé E_*, alors il existe sur E une topologie plus faible (moins fine) pour laquelle $\overline{B_1}$ est compact.

III.4 Espaces réflexifs

Définition 25 :
L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est réflexif

$$\Longleftrightarrow i : \begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & E^{**} \\ x & \longmapsto & i_x \end{array} \textit{ est surjective}$$

Remarque :

- i est injective car une isométrie, ainsi si elle est surjective, c'est une bijection isométrique et donc en particulier un isomorphisme d'espaces vectoriels normés. On a alors $E \simeq E^{**}$.
- Il existe des espaces non réflexifs (pour lesquels i n'est pas surjective) qui sont tout de même isomorphes à leur bidual.
- $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach car $\mathbb{K}$ est complet. Donc E^{**} est un espace de Banach aussi. En particulier, tout espace réflexif est un espace de Banach.
- Sur un espace réflexif, les topologies faibles et $*$-faibles coïncident.

Pour obtenir des critères de réflexivité, on peut construire les duaux des espaces de fonctions linéaires continues.

Définition 26 :
Soient X et Y des espaces vectoriels normés. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$.
$\varphi^* : Y^* \longrightarrow X^*$ est définie par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Donc $\forall x \in X, \quad \big(\varphi^*(f)\big)(x) = f\big(\varphi(x)\big)$
φ^* est l'application duale (ou transposée) de φ.

Exemple :
$X = \mathbb{K}^n, \quad Y = \mathbb{K}^m. \quad \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de X et $(\tilde{e}_j)_{1\leq j\leq m}$ une base de Y.

Alors $(e^i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de X^* et $e^i(e_k) = \delta_k^i$
$(\tilde{e}^j)_{1\leq j\leq m}$ est la base duale de Y^* et $\tilde{e}^j(\tilde{e}_k) = \delta_k^i$

Et on définit $\varphi_{ij} = e^i\big(\varphi(e_j)\big)$ et $\varphi^*_{ij} \begin{aligned}[t] &= \big(\varphi^*(\tilde{e}^j)\big)(e_i) \\ &= \tilde{e}^j\big(\varphi(e_i)\big) \\ &= \varphi_{ji} \end{aligned}$

Ainsi la matrice de φ^* est la transposée de celle de φ.

Lemme :
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi^{**} \\ F & \xrightarrow{i_F} & F^{**} \end{array}$$

*commute (*i.e. $\varphi^{**} \circ i_E = i_F \circ \varphi$*).*

Démonstration :
Soit $x \in E$ et $g \in F^*$. $\quad \begin{aligned}[t] \big(i_F \circ \varphi(x)\big)(g) &= i_F\big(\varphi(x)(g)\big) \\ &= g\big(\varphi(x)\big) \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \big(\varphi^{**} \circ i_E(x)\big)(g) &= i_E(x)\big(\varphi^*(g)\big) \\ &= \big(\varphi^*(g)\big)(x) \\ &= g\big(\varphi(x)\big) \end{aligned}$$

Donc φ^{**} est un prolongement de $\tilde{\varphi} = i_F \circ \varphi \circ i_E^{-1} : i_E(E) \longmapsto F^{**}$

$\diamondsuit$

Proposition 3 :
φ^* est continue et $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \|\varphi^{**}\| &\geq \|\tilde{\varphi}\| \text{ par définition d'un prolongement.} \\ &= \|\varphi\| \text{ car } i_{E} \text{ et } i_{F} \text{ sont des isométries} \end{aligned}$$

Soit $x \in E, g \in F^*$. $\quad \begin{aligned} |\varphi^*(g)(x)| &\leq \|g\|_{F^*} \|\varphi(x)\|_{F} \\ &\leq \|g\|_{F^*} \|\varphi\| \cdot \|x\|_{E} \end{aligned}$

$$\Longrightarrow \|\varphi^*(g)\|_{F^*} = \|g \circ \varphi\|_{F^*} \leq \|g\|_{F^*} \|\varphi\|$$

$\Longrightarrow \|\varphi^*\| \leq \|\varphi\|$
Donc $\|\varphi^{**}\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|\varphi\| \leq \|\varphi^{**}$
D'où finalement $\|\varphi^{**}\| = \|\varphi^*\| = \|\varphi\| = \|\varphi^{**}\|$

$\diamondsuit$

Lemme :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. on considère $i_{E^*} : E^* \longrightarrow E^{***}$ et l'application duale de $i_{E} : E \longrightarrow E^{**}$ qui est $i_{E}^* : E^{***} \longrightarrow E^*$.
On a $i_{E}^* \circ i_{E^*} = id$.

Démonstration :
Soit $a \in E$ et $f \in E^*$. $\big(i_{E}^* \circ i_{E^*}\big)(f) = i_{E}^*\big(i_{E^*}(f)\big) = i_{E^*}(f) \circ i_{E}$
$\Longrightarrow \big(i_{E}^* \circ i_{E^*}\big)(f)(a) = i_{E^*}(f)\big(i_{E}(a)\big) = i_{E}(a)(f) = f(a)$. Donc $i_{E}^* \circ i_{E^*}(f) = f$.

$\diamondsuit$

Proposition 4 :
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif et F un sous-espace vectoriel fermé de E,
Alors F est réflexif.

Démonstration :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "i_{F}"] \arrow[d, hook, "j"] & F^{**} \arrow[d, "j^{**}"] \\ E \arrow[r, hook, two heads, "i_{E}"] & E^{**} \end{tikzcd}$$

Legende :
$\hookrightarrow$ injection
$\twoheadrightarrow$ surjection
$\lhook\joinrel\twoheadrightarrow$ bijection

Ce diagramme commute.

On veut montrer que i_{F} est surjective.
Soit $G \in F^{**}$. Alors $j^{**}(G) \in i_{E}(E)$ car i_{E} est surjectif. Donc $\exists a \in E : j^{**}(G) = i_{E}(a)$.

Par définitin de l'application duale on a $j^{**}(G) = G \circ j^*$ et donc, pour $f \in E^*$. $\big(j^{**}(G)\big)(f) = G\big(j^*(f)\big) = G(f \circ j) = G(f_{|_F})$. D'où $i_{_E}(a) = f(a)$.

Montrons que j^{**} est injective. Soit $G \in Ker(j^{**})$. Alors $\forall f \in E^*, \quad G(f_{|_F}) = 0$.

D'après Hahn-Banach, $\forall g \in F^*, \quad g$ est une restriction sur F d'un élément $\tilde{g} \in E^*$.

Donc $G(g) = 0 \quad \forall g \in F^*$ donc $Ker(j^{**}) = 0 \Longleftrightarrow j^{**}$ est injective.

On a montré que $\forall f \in E^*, \quad f(a) = G(f_{|_F})$. D'où $a \in F$.

En effet, si on suppose que $a \notin F$, d'après un corollaire de Hahn-Banach, $\exists f \in E^* : f_{|_F} = 0, f(a) \neq 0$, ce qui est absurde.

Alors on a pour $a \in F, \quad \big(j^{**}(G)\big)(f) = \Big(i_{_E}\big(j(a)\big)\Big)(f) = j^{**}\big(i_{_F}(a)\big)(f)$ par commutativité du diagramme.

Donc $j^{**}(G) = j^{**}\big(i_{_F}(a)\big)$ ce qui implique $G = i_{_F}(a)$ par l'injectivité de j^{**}.

Donc $i_{_F}$ est surjective.

$\diamondsuit$

Corollaire 7 (de Hahn-Banach):

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de Banach, F un sous-espace vectoriel fermé de E et $a \in E \setminus F$. Alors $\exists f \in E^*$ telle que $f_{|_F} \equiv 0$ et $f(a) \neq 0$.

Démonstration :

Soit $\lambda : \begin{array}{ccc} F + \mathbb{R}a & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g + ta & \longmapsto & t\|a\| \end{array}$

λ est linéaire et $\|\lambda\| = \sup\limits_{x \in F + \mathbb{R}a} \dfrac{|\lambda(x)|}{\|x\|} = \sup\limits_{y \in F} \dfrac{\|a\|}{\|y + a\|} = \dfrac{\|a\|}{\inf\limits_{y \in F} \|a - y\|} = \dfrac{\|a\|}{d(a, F)}$

Comme $d(a, F) = 0 \Longleftrightarrow a \in \overline{F}, \quad d(a, F) > 0 \Longrightarrow \|\lambda\| < \infty$.

$\underset{\text{analytique}}{\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow}}$ On peut prolonger λ en une $\lambda^* \in E^* : \lambda^*_{|_{F+\mathbb{R}a}} = \lambda$. On pose alors $f = \lambda^*$.

$\diamondsuit$

Corollaire 8 (de la proposition):

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

E est réflexif $\Longleftrightarrow E^*$ est réflexif.

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ E est réflexif $\Longleftrightarrow i_{_E}$ est bijective $\Longrightarrow i^*_{_E}$ est bijective.

Or on a vu que $i^*_{_E} \circ i_{_{E^*}} = id$.

D'où $i^*_{_E}$ est bijective $\Longleftrightarrow i_{_{E^*}}$ est bijective $\Longleftrightarrow E^*$ est réflexif.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons E^* réflexif.

Alors E^{**} est réflexif. Or $i_{_E}(E)$ est un sous-espace vectoriel de E^{**} fermé car $i_{_E}$ est une isométrie. Donc $i_{_E}(E)$ est réflexif (par la proposition précédente), donc E est réflexif car $i_{_E}$ est aussi bijective.

$\diamondsuit$

Théorème 10 :
Soit $(E, \|\cdot\_E)$ *un espace de Banach. Soit* $x \in E$ *et* $G \in E^{**}$*.*
On note $\overline{B}_1 = \overline{B}_{\|\cdot\|_E}(x, 1)$ *et* $\overline{B}_1^{**} = \overline{B}_{\|\!|\cdot|\!\|_{E^{**}}}(G, 1)$*.*
Alors $i_{_E}(\overline{B}_1)$ *est dense dans* $\overline{B}_1^{**}$ *pour la topologie* $*$*-faible.*

Démonstration :
Soit $G \in \overline{B}_1^{**}$. On doit montrer que tout voisinage de G pour la topologie $*$-faible contient un élément de $i_{_E}(\overline{B}_1)$.
Cela revient à montrer que tout ouvert O contenant G contient un élément $i_{_E}(x)$ où $x \in \overline{B}_1$ et avec $(f_k)_{_{1\leq k\leq n}} \subset E^*$, $\quad (U_k)_{_{1\leq k\leq n}} \subset \mathbb{K}$ ouverts et $O = \bigcup \bigcap_{k=1}^{n} i_{f_k}^{-1}(U_k)$.
$\Longleftrightarrow$ *idem* avec $\forall \epsilon > 0, \quad U_k = B_{|\cdot|}(G(f_k), \epsilon)$.
$\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall f_k \in E^*, \exists x \in \overline{B}_1 : \forall k \quad |G(f_k) - i_{_E}(x)(f_k)| < \epsilon$
$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall f_k \in E^* \quad \inf_{x\in\overline{B}_1} \{\sum_{i=1}^{n} |G(f_i) - f_i(x)|^2\} = 0$

$\diamondsuit$

Lemme :
Soit $G \in E^{**}, \quad (f_i)_{_{1\leq i\leq n}} \subset E^*$*. Soit* $h(x) = \sum_{i=1}^{n} |G(f_i) - f_i(x)|^2$*.*
Si $x \in \overline{B}_1 \subset E$ *alors* $\inf_{x\in\overline{B}_1} \{h(x)\} = 0$*.*

Démonstration :
Notons $I = \inf_{x\in\overline{B}_1} \{h(x)\}$. Soit $(a_n)_{_{n\in\mathbb{N}}} \subset \overline{B}_1$ telle que $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = I$.
$\forall\ 1 \leq i \leq n$, les f_i sont continues et $\quad f_i(\overline{B}_1) \subset B_{_{|\cdot|}}(0, \|\!|f_i|\!\|_{_{E^*}})$ qui est compacte.
(car $\forall x \in \overline{B}_1 : |f_i(x)| \leq \|\!|f_i|\!\| \cdot \|x\| \leq \|\!|f_i|\!\|$) et donc $f_i(a_n)$ admet une sous-suite convergente.
On peut supposer (quitte à prendre une sous-suite) que $\forall\ 1 \leq i \leq n \quad f_i(a_n)$ converge.
Posons $\xi_i = \lim_{n\to\infty} f_i(a_n)$ et $\delta_i = G(f_i) - \xi_i$. Donc $I = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i|^2$.

Soit $x \in \overline{B}_1$ et $0 \leq t \leq 1$. $\quad h\big((1-t)a_k + tx\big) = \sum_{i=1}^{n} |G(f_i) - (1-t)f_i(a_k) + tf_i(x)|^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} |G(f_i) - f_i(a_k)| + 2t\Re\Big[\big(G(f_i) - f_i(a_k)\big)\big(\overline{f_i(a_k) - f_i(x)}\big)\Big] + t^2 \sum_{i=1}^{n} |f_i(a_k) - f_i(x)|^2$$

$$\underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} I \leq I + 2t \sum_{i=1}^{n} \Re\Big[\big(G(f_i) - \xi_i\big)\big(\overline{\xi_i - f_i(x)}\big)\Big] + t^2 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - f_i(x)|^2$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \Re\Big[\big(G(f_i) - \xi_i\big)\big(\overline{\xi_i - f_i(x)}\big)\Big] + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - f_i(x)|^2$$

$$\underset{t\to 0}{\Longrightarrow} 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \Re\Big[\big(G(f_i) - \xi_i\big)\big(\overline{\xi_i - f_i(x)}\big)\Big]$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Re\Big[\overline{\delta}_i\big(f_i(x) - \xi_i\big)\Big] \leq 0$$

Posons $f = \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i f_i \in E^*$. Alors $\Re\big(f(x)\big) \leq \Re\Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i \quad \forall x \in \overline{B}_1\Big)$.

$\|f\|_{E^*} \leq \sup_{x \in \overline{B}_1} \Re\big(f(x)\big) \qquad \big(\exists c \in \mathbb{K} : |c| = 1, |f(cx)| = \Re\big[f(x)\big]\big)$.

Donc $\|f\|_{E^*} \leq \Re\Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i\Big) \qquad (\star)$

De plus $f(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i f_i(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i$

Donc $\|f\|_{E^*} \geq \Big|\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i\Big| \qquad (\star\star)$

$\overset{(\star)(\star\star)}{\Longrightarrow} \Big|\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i\Big| \leq \Re\Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i\Big) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i = \Big|\sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i\Big| = \|f\|_{E^*}$

D'où $I = \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \big(G(f_i) - \xi_i\big) = G(f) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\delta}_i \xi_i = G(f) - \|f\|_{E^*}$

Comme $\|G\|_{E^{**}} < 1$, on a $|G(f)| \leq \|f\|_{E^*}$ et donc $G(f) - \|f\|_{E^*} \leq 0$.

Donc $I = 0$.

$\diamondsuit$

Corollaire 9 :

L'espace de Banach E est réflexif $\Longleftrightarrow$ Les topologies faible et $*$-faible coïncident sur E^*

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Clair.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que les topologies faible et $*$-faible coïncident sur E^*.

On a vu que la boule $\overline{B}_1^*$ est compact pour la topologie $*$-faible et donc aussi pour la topologie faible.

Donc d'après le théorème suivant, l'espace de Banach E^* est réflexif. Donc E est réflexif.

$\diamondsuit$

Théorème 11 :

L'espace de Banach E est réflexif $\Longleftrightarrow$ $\overline{B}_1$ est compact pour la topologie faible.

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit E un espace de Banach réflexif. Alors E^* est réflexif.

$\Longrightarrow$ Les topologies faible et $*$-faible coïncident sur E^{**}.

Donc $\overline{B}_1^{**}$ est compact pour la topologie $*$-faible et donc aussi pour la topologie faible.

Par réflexivité, $\overline{B}_1^{**} \simeq \overline{B}_1$ qui est donc faiblement compact.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La topologie relative (induite) sur $i_E(E) \subset E^{**}$ par la topologie $*$-faible est la topologie faible sur E. En effet, la topologie $*$-faible sur E^{**} étant la moins fine (plus petite) qui rend les applications i_f, $f \in E^*$ continues, elle induit sur $i_E(E)$ la topologie la moins fine qui rend les applications restreintes $i_f|_{i_E(E)} : i_E(E) \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. Mais pour $x \in E$ on a $i_f(i_E(x)) = i_E(x)(f) = f(x)$. Donc $i_f \circ i_E = f$ et la topologie relative sur $i_E(E)$ est la moins fine qui rend les applications $f \in E^*$ continues. Par définition c'est la topologie faible.

Supposons $\overline{B}_1$ faiblement compact. Alors $i_E(\overline{B}_1)$ est faiblement compact, donc compact dans $\overline{B}_1^{**}$ pour la topologie $*$-faible. D'après le théorème précédent, $i_E(\overline{B}_1)$ est dense dans $\overline{B}_1^{**}$ pour la topologie $*$-faible.

On a $i_E(\overline{B}_1) = \overline{i_E(\overline{B}_1)} = \overline{B}_1^{**}$

Donc $i_E(E) \quad = \{i_E(tx) : x \in \overline{B}_1, t \in \mathbb{R}^+\}$

$= \{ty : y \in \overline{B}_1^{**}, t \in \mathbb{R}^+\}$

$= E^{**}$

$\diamondsuit$

Remarque :

Soit E un espace de Banach.

$\overline{B}_1$ compact $\Longleftrightarrow \dim E < \infty$

$\overline{B}_1$ faiblement compact $\Longleftrightarrow E$ réflexif

$\overline{B}_1$ $*$-faiblement compact $\Longleftarrow E$ admet un prédual.

III.5 Principe de la majoration uniforme (Théorème de Banach-Steinhaus)

Théorème 12 :

Soient E, F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}(E,F)$.
On suppose que $\forall x \in E, (T_i(x))_{i\in I}$ est bornée (c-à-d. $\forall x \in E \quad \exists c_x > 0 : \sup\limits_{i\in I} \|T_i(x)\|_F \leq c_x$).
Alors la famille $(T_i)_{i\in I}$ est uniformément bornée sur tout fermé de E
(c-à-d. $\forall B \subset E$ borné, $\quad \exists c > 0 : \sup\limits_{\substack{i\in I \\ x\in B}} \|T_i(x)\|_F \leq c$).

Remarque :

$$\forall x \in E, \quad \exists c_x : \quad \forall i \in I : \quad \|T_i(x)\|_F \leq c_x \quad \Longrightarrow \quad \exists c > 0 : \quad \sup_{i\in I} \|T_i\| \leq c.$$

Rappel :

D'après le théorème de Baire, dans un espace métrique complet, $\forall (F_i)_{i\in I}$ fermés d'intérieur vide, $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$ est d'intérieur vide.
En particulier, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés tels que $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$ contient un ouvert,
alors $\exists i_0 : F_{i_0}$ contient un ouvert.

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n, \forall i \in I\}$.
Comme T_i est continue, X_n est fermé et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n = E$ car $\forall x \in E, \quad \exists c_x : \forall i \in I : \|T_i(x)\|_F \leq c_x$
$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow} \exists n_0 : \mathring{X}_{n_0} \neq \varnothing$
$\Longleftrightarrow \exists n_0 : \exists x_0 \in E, r > 0 : B_E(x_0, r) \subset X_{n_0}$
Donc $\forall x \in B_E(0,r) : \forall i \in I : \|T_i(x_0 + x)\|_F \leq n_0$
Donc $\forall x \in B_E(0,r) : \|T_i(x)\|_F \leq \|T_i(x_0+x)\|_F + \|T_i(-x_0)\|_F = \|T_i(x_0+x)\|_F + \|T_i(x_0)\|_F \leq 2n_0$
Donc $\|T_i\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq r} \dfrac{\|T_i(x)\|_F}{r} \leq \dfrac{2n_0}{r}$
D'où $\|T_i\|$ est borné par $\dfrac{2n_0}{r}$.

$\diamondsuit$

Corollaire 10 :

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $\forall x \in E, \quad (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F.
Alors les limites définissent une application $T : E \longrightarrow F : x \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ linéaire continue et $\|T\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{n} \|T_n\|$.

Démonstration :

Il est clair que T est linéaire. D'après le théorème précédent, $\exists c > 0$ telle que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq c$
$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup\limits_{x\in E} \dfrac{\|T_n(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq c$
$\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E \quad \|T_n(x)\|_F \leq c\|x\|_E$
Par continuité de $\|\cdot\|_F, \quad \|T(x)\|_F = \|\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)\|_F = \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_F \leq c\|x\|_E$

$\Longrightarrow \|T\| \leq c$. Donc T est continue.

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|T(x)\|_F &= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_F \\ &= \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \lim_{n\to\infty} \inf_n \|T_n(x)\|_F \\ &\leq \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \lim_{n\to\infty} \inf_n \{\|T_n\| \cdot \|x\|_E\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \inf_n \|T_n\|\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

III.6 Théorème de l'application ouverte

Théorème 13 :

Soient E, F deux espaces de Banach. $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si T est surjective alors T est ouverte ($\forall U$ ouvert de $E, T(U)$ est un ouvert de F).

Corollaire 11 :

*Si T est bijective alors T est bicontinue (*ie. *T^{-1} est continue $\Longleftrightarrow T$ ouverte).*

Démonstration :

Il suffit de montrer que $\exists c > 0$: la boule ouverte $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$ $(*)$

En effet, il est clair qu'il suffit de montrer que $\forall x \in E, \quad \exists \epsilon_{x,r} > 0 : \quad B_F(T(x), \epsilon_{x,r}) \subset T(B_E(x,r)) \quad (**)$

Mais $T(B_E(x,r)) = T(x) + rT(B_E(0,1))$ donc $(*) \Longrightarrow (**)$ = avec $\epsilon_{x,r} = cr$.

On pose $X_n = \overline{T(B_E(0,n))} = \overline{nT(B_E(0,1))} = n\overline{T(B_E(0,1))}$.

Alors T étant surjective, $F = T(E) = T\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_E(0,n)\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T\Big(B_E(0,n)\Big) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ union de fermés d'intérieur non vide. Donc d'après Baire :

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : X_{n_0}$ est d'intérieur vide. Donc $n_0\overset{\circ}{\overline{T(B_E(0,1))}} \neq \varnothing \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{T(B_E(0,1))}} \neq \varnothing$.

Donc $\exists y_0 \in F, \quad c > 0 : \quad B_F(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_E(0,1))}$

En particulier $y_0, -y_0 \in \overline{T(B_E(0,1))}$ (car si $y_0 = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_E(0,1)$ alors $-y_0 = \lim_{n\to\infty} T(-x_n)$ et $(-x_n) \in B_E(0,1)$ aussi).

$B_F(0,4c) = B_F(y_0,4c) - y_0 \subset \overline{T(B_E(0,1))} + \overline{T(B_E(0,1))} \subset \overline{T(B_E(0,2))}$

Donc $\exists c > 0 : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad B_F(0, \frac{2c}{2^k}) \subset \overline{T(B_E(0, \frac{1}{2^k}))}$ $(*)$

$\Longrightarrow \forall y \in B_F(0, \frac{2c}{2^k}), \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists x \in B_E(0, \frac{1}{2^k})$ tel que $\|y - T(x)\|_F < \epsilon$.

Soit $y \in B_F(0,c)$. Pour $k = 1$ on pose $y_1 = y$ et $\epsilon = \frac{c}{2}$

$$(*) \Longrightarrow \exists z_1 \in B_E(0, \frac{1}{2}) : \quad \|y_1 - T(z_1)\|_F < \frac{c}{2}$$

Pour $k = 2$ on pose $y_2 = y_1 - T(z_1)$ et $\epsilon = \frac{c}{4}$

$$(*) \Longrightarrow \exists z_2 \in B_E(0, \frac{1}{4}) : \quad \|y_2 - T(z_2)\|_F < \frac{c}{4}$$

On pose $y_k = y_{k-1} - T(z_{k-1}) \in B_{_F}(0, \frac{2c}{2^k})$ et $\epsilon = \frac{c}{2^k}$

$$(*) \Longrightarrow \exists z_k \in B_{_E}(0, \frac{1}{2^k}) : \quad \|y_k - T(z_k)\|_{_F} < \frac{c}{2^k}$$

Ainsi on a construit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{_F}(0,c)$ telle que $\|y_{k+1}\|_{_F} < \frac{c}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ donc $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans F

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k - T(z_k) \quad &= y_{k-1} - T(z_{k-1}) - T(z_k) \\ &= y - (T(z_1) + \cdots + T(z_n)) \end{aligned}$$

Posons $x_n = z_1 + \cdots + z_n$. Alors $T(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_{_E} \quad &\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|z_k\| \qquad (n > m) \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{\tilde{c}}{2^m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est complet donc $\exists x \in E$ tel que$\|E\|_{_E} < 1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
T continue $\Longrightarrow T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = y$
Donc $y \in T(B_{_E}(0,1))$.

$\diamondsuit$

IV Espaces de Hilbert

Définition 27 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une forme hermitienne sur E est une application $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

i) $\forall y \in E, \quad x \longmapsto < x, y >$ *est linéaire.*

ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}$.

Remarque :

ii) $\Longrightarrow \forall x \in E, \quad y \longmapsto < x, y >$ est anti-linéaire.

$\Longleftrightarrow \forall x \in E$ fixé et $\forall y_1, y_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad < x, y_1 + \lambda y_2 >=< x, y_1 > +\overline{\lambda} < x, y_2 >$.

Définition 28 :

Une forme linéaire $<,>$ est définie positive

$\Longleftrightarrow \forall x \neq 0, \quad < x, x >> 0$.

On l'appelle un produit scalaire.

Définition 29 :

Si $<,>$ est une forme hermitienne définie positive, on pose $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ et on l'appelle la norme de x.

Lemme (inégalité de Cauchy-Scharz):

$| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Démonstration :

On pose $\alpha =< y, y >= \|y\|^2$ et $\beta = - < x, y >$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } 0 &\leq< \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y > \\ &= \alpha < x, \alpha x + \beta y > +\beta < y, \alpha x + \beta y > \\ &= \alpha\overline{\alpha} < x, x > +\alpha\overline{\beta} < x, y > +\beta\overline{\alpha} < y, x > +\beta\overline{\beta} < y, y > \\ &= \|y\|^4 \cdot \|x\|^2 + \|y\|^2 \left(\overline{\beta} < x, y > +\beta\overline{< x, y >}\right) + | < x, y > |^2 - \|y\|^2 \\ &= \|y\|^4 \cdot \|x\| - \|y\|^2 \cdot | < x, y > |^2 \end{aligned}$$

Si $y = 0$ alors l'inégalité est triviale.

Si $y \neq 0$ alors $< y, y >= \|y\|^2 \neq 0$ donc en divisant par $\|y\|^2$ on obtient $0 \leq \|y\|^2 \cdot \|x\|^2 - | < x, y > |$.

$\diamondsuit$

Lemme :

$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$ *est une norme.*

Démonstration :

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ clair car $< x, x >> 0$ si $x \neq 0$.

ii) $\|\lambda x\| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda} < x, x >} = |\lambda| \cdot \|x\|$.

iii)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 = < x+y, x+y > &= < x,x > + < y,y > + < x,y > + < y,x > \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(< x,y >) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2| < x,y > | \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\diamondsuit$

Définition 30 :

Un espace pré-Hilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Définition 31 :

Un espace de Hilbert est un espace $(\mathcal{H}, <,>)$ pré-Hilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.

Remarque :

C'est donc un espace de Banach où la norme provient d'un produit scalaire.

Proposition 5 (identité du parallélogramme):

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Démonstration laissée en exercice.

Définition 32 :

On dit que x est perpendiculaire (ou orthogonal) à y lorsque $< x,y >= 0$.

Dans ce cas, on a (Pythagore) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Proposition 6 :

Soit $(E, <,>)$ un espace de Hilbert et $w \in E$ tel que $w \neq 0$.

Alors $\forall x \in E, \quad \exists! c \in \mathbb{C}$ tel que $x - cw$ est orthogonal à w.

Démonstration :

$0 = < x - cw, w >=< x,w > -c < w,w >=< x,w > -c\|w\|^2$ d'où $c = \dfrac{< x,w >}{\|w\|^2}$.

$\diamondsuit$

Proposition 7 :

Soient $(E, <,>)$ un espace de Hilbert et $(w_i)_{1\leq i\leq n} \subset E$ tels que $< w_i, w_j >= 0 \quad \forall i \neq j$.

Alors $\forall x \in E, \quad \exists! (c_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{C}$ telle que $\forall k, \qquad x - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i w_i$ soit orthogonal à w_k.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
0 = < x - \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, w_k > &= < x, w_k > - \sum_{i=1}^{n} c_i < w_i, w_k > \\
&= < x, w_k > -c_k \|w_k\|^2
\end{aligned}$$

Donc $c_k = \dfrac{< x, w_k >}{\|w_k\|^2}$

$\diamondsuit$

Définition 33 :
Une famille $(w_i)_{i\in I} \subset E$ *d'éléments mutuellement perpendiculaires (*ie. $\forall i \neq j, \quad < w_i, w_j >= 0$*) est dite orthogonale.*

Définition 34 :
On note $Vect\{w_i : i \in I\}$ *l'espace engendré (algèbriquement) par* $(w_i)_{i\in I}$*. C'est l'espace des combinaisons linéaires finies de* w_k*.*
On dit que la famille est totale si $\overline{Vect\{w_i : i \in I\}} = E$ *pour* $\|\cdot\|$*.*
Si de plus $\forall i \in I, \quad \|w_i\| = 1$ *alors* $(w_i)_{i\in I}$ *est dite orthonormale.*

Remarque :
Une famille orthonormale totale est une base orthonormale. (Une telle famille n'est pas une base linéaire dans le sens algébrique ! *ie.* on ne peut pas exprimer tout élément de l'espace comme combinaison linéaires *finie* de membres de la base orthonormale.)

Lemme :
Soit $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* $F \subset \mathcal{H}$ *un sous espace vectoriel fermé. Soit* $x \in \mathcal{H}$*.*
Si on note $a = \inf_{y\in F} \|x - y\| = d(x, F)$ *alors* $\exists y_0 \in F$ *tel que* $a = \|x - y_0\|$*.*

Démonstration :
$\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F : \quad a = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\|$. Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\Big(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\Big) - \|y_n - x + y_m - x\|^2 \qquad \text{(identité du parallelogramme)} \\ &= 2\Big(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\Big) - \underbrace{4\Big\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\Big\|^2}_{\geq 4a^2 \text{ car } \frac{y_n+y_m}{2} \in F} \end{aligned}$$

D'où $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\Big(\underbrace{\|y_n - x\|^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} a^2} + \underbrace{\|y_m - x\|^2}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} a^2}\Big) - 4a^2$

Plus précisement, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0$ tel que $\forall n, m \geq n_0$:

$$\Big|\|y_n - x\|^2 - a^2\Big| < \epsilon \text{ et } \Big|\|y_m - x\|^2 - a^2\Big| < \epsilon \Longrightarrow \forall n, m \geq n_0 \quad \|y_n - y_m\|^2 < 4\epsilon$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F fermé dans un complet donc complet. Donc elle converge dans F.
$\exists y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ et par continuité de la norme, $a = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - \lim_{n\to\infty} y_n\| = \|x - y_0\|$.

$\diamondsuit$

Théorème 14 :
Soit $F \subset \mathcal{H}$ *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert. On suppose* $F \neq \mathcal{H}$*.*
Alors $\exists z \in \mathcal{H}, \quad z \neq 0, \quad$ *tel que* z *est orthogonal à* F *(*ie. $\forall y \in F, \quad < z, y >= 0$*).*

Démonstration :

Soit $x \in \mathcal{H} \setminus F$. D'après le lemme, $\exists y_0 \in F$: $\inf_{y \in F} \|x-y\| = \|x-y_0\| = d(x,F) > 0$ car F fermé.

On pose $z = x - y_0$. $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\|x-y_0\|^2 \leq \|x-y_0+\alpha y\|^2$

Donc $0 \leq \alpha\overline{\alpha} < y,y > +2\Re(\alpha < y, \underbrace{x-y_0}_{z} >)$. On pose $\alpha = t < z,y >$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Donc $0 \leq t^2\|y\|^2| < z,y > |^2 + 2t| <,z,y > |^2 = \left(t^2\|y\|^2 + 2t\right)| < z,y > |^2$

$\exists t :$ $t^2\|y\|^2 + 2t < 0$ donc $| < z,y > | = 0$

$\diamondsuit$

Corollaire 12 :

Il existe toujours une base orthogonale dans un espace de Hilbert.

Démonstration :

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles orthogonales de $\mathcal{H}$.

Sur $\mathcal{S}$ l'inclusion $\subset$ définit un ordre inductif. Donc d'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal.

Soit $\mathcal{B}$ un tel élément maximal. Soit $F = Vect\{b : b \in \mathcal{B}\}$. On veut montrer que $\overline{F} = \mathcal{H}$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathcal{H} \setminus \overline{F}$. D'après le théorème, $\exists z \in \mathcal{H}$ tel que $< z, \overline{F} >= 0$.

Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{z\}$. C'est une famille orthogonale, $z \notin \mathcal{B}$ donc $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}'$ ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{B}$. Absurde.

Donc $\overline{F} = \mathcal{H}$.

$\diamondsuit$

Remarque :

Une base orthogonale donne une base orthonormée par simple normalisation : $b \in \mathcal{B} \Longrightarrow \dfrac{b}{\|b\|}$ est de norme 1.

Proposition 8 :

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

i) $E = F_1 + F_2$

ii) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Alors $\forall x \in E$, $\exists! y_1 \in F_1$, $\exists! y_2 \in F_2$ *tels que* $x = y_1 + y_2$.

On dit que F_1 et F_2 sont des espaces complémentaires.

Démonstration :

Si $x = y_1 + y_2 = y_1' + y_2'$ alors $y_1 - y_1' = y_2' - y_2$ d'où $y_1 - y_1' \in F_1 \cap F_2 \Longrightarrow y_1 = y_1'$ et $y_2 = y_2'$.

$\diamondsuit$

Définition 35 :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et F_1, F_2 deux sous-espaces tels que $\mathcal{H} = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Si $\forall y_1 \in F_1$ et $\forall y_2 \in F_2$, $< y_1, y_2 >= 0$, on dit que $\mathcal{H}$ est la somme orthogonale de F_1 et F_2.

Proposition 9 :

Soit F un sous-ensemble de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$

$F^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : \forall y \in F, \quad < x, y >= 0\}$ *est un fermé.*

Remarque :

$F^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel.

Démonstration :

Soit l'application linéaire $l_y : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & < x, y > \end{array}$

$\|l_y\| = \sup\limits_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ \|x\|=1}} | < x, y > | \leq \|y\|$ donc l_y est continue. $\Longrightarrow F^{\perp} = \bigcap\limits_{y \in F} l_y^{-1}(\{0\}) = \bigcap\limits_{y \in F} Ker(l_y)$ fermé.

$\diamondsuit$

Corollaire 13 :

Soit $F \subset \mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

Alors $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$.

Démonstration : i) $F \cap F^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} :< x, x >= 0\} = \{0\}$

ii) Montrons que $F + F^{\perp}$ est fermé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F + F^{\perp}$ une suite de Cauchy.
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists! (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F, \quad \exists! (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\perp} : \quad x_n = y_n + z_n$
Par construction, $\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad < y_m, z_n >= 0$ donc la propriété de Cauhcy, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0$: $\forall n, m \quad \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon$, implique $\|x_n - x_m\|^2 = \|(y_n - y_m) + (z_n - z_m)\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2$ (Pythagore).
Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi dans $F^{\perp}$.
F et $F^{\perp}$ sont fermés dans $\mathcal{H}$ complet donc complets.
$\exists y \in F, \quad \exists z \in F^{\perp} : \quad y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} y \qquad z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} z$
Donc $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x = y + z \in F + F^{\perp}$
$\Longrightarrow F + F^{\perp}$ fermé.

iii) Supposons $\mathcal{H} \neq F + F^{\perp}$.
Alors comme $F + F^{\perp}$ est fermé, $\exists z \in \mathcal{H}$ tel que z soit orthogonal à $F + F^{\perp}$.
En particulier, $\forall y \in F \subset F + F^{\perp}, \quad < y, z >= 0 \Longrightarrow z \in F^{\perp}$. Absurde !
Donc $F + F^{\perp} = \mathcal{H}$.

iv) Il est clair que pour $y \in F$ et $z \in F^{\perp}, \quad < y, z >= 0$.

$\diamondsuit$

Proposition 10 :

Soient F et E deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{H}$. On suppose F fermé.

Si $\mathcal{H} = F \oplus E$ alors $E = F^{\perp}$.

Démonstration :

Par définition de la somme directe $\oplus$, $\quad E \subset F^{\perp}$.

Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ alors $x = y' + z'$ avec $y' \in F$ et $z' \in E$.

Par unicité de la décomposition, $y = y'$ et $z = z'$ donc $F^{\perp} \subset E$.

$\diamondsuit$

Remarque :

Pour tout sous-ensemble F de $\mathcal{H}$, $\quad F^{\perp\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \forall z \in F^{\perp}, < z, y >= 0\} \supset F$

Si F est un sous-espace vectoriel fermé, alors $\mathcal{H} = F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$ et par unicité, $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Définition 36 :

Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$.

Pour $x = y + z, \quad y \in F, \quad z \in F^{\perp}, \quad p_F : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & y \end{array}$

p_F est la projection orthogonale sur F. Elle est linéaire et continue.

$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ *donc* $\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 \leq \|x\|^2 \Longrightarrow |\!|\!|p_F|\!|\!| \leq 1.$

Théorème 15 :

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux. $i \neq j, \quad \forall x \in F_i, \quad \forall y \in F_j : \quad < x, y >= 0.$

On pose $F = \overline{Vect(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i, i \in I)}$. *Alors* $\forall x \in F, \quad \exists ! x_i \in F_i$ *tel que* $x = \sum_{i\in I} x_i$.

De plus, $x_i = p_{F_i}(x)$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall y_i \in F_i, \quad \|x - \sum_{i\in I} p_{F_i}(x)\| \leq \|x - \sum_{i\in I} y_i\|$.

Donc $x - \sum_{i\in I} p_{F_i}(x)$ *est solution d'un problème de minimisation.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\text{Soit } y_j \in F_j, \quad j \leq n, \quad < y_j, x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x) > \quad &=< y_j, x > - \sum_{i=1}^{n} < y_j, p_{F_i}(x) > \\
&=< y_j, x > - < y_j, p_{F_j}(x) > \qquad \text{car } < y_j, p_{F_i}(x) >= 0 \text{ si } i \neq j \\
&= 0 \qquad \text{car } x - p_{F_j}(x) \in F_j^{\perp}
\end{aligned}$$

Donc $x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x) \in F_j^{\perp} \qquad \forall j \leq n$

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} y_i\|^2 = \| \underbrace{x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x)}_{\in F_j^{\perp} \quad \forall j \leq n} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - p_{F_i}(x)}_{\in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i} \| = \|x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x)\|^2 + \underbrace{\| \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_{F_i}(x)\|^2}_{\geq 0}$$

$\Longrightarrow \forall y_i \in F_i, \quad \|x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x)\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} y_i\|$

Soit $x \in F = \overline{Vect\{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\}}$

Donc $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_i \in F_i, \quad i \leq n$ tels que $\|x - \sum_{i=1}^{n} y_i\| < \epsilon$

Donc $\forall \epsilon, \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x - \sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x)\| < \epsilon$

Donc $\sum_{i=1}^{n} p_{F_i}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

Reste à montrer que les x_i sont uniques dans F_i. Supposons que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in F_i$

p_{F_i} continue car d'après Pythagore $\|p_{F_i}(x)\|^2 + \|p_{F_i^\perp}(x)\|^2 = \|x\|^2 \Longrightarrow \|p_{F_i}\| \leq 1$.

Alors $p_{F_j}(x) = p_{F_j}\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \lim_{n\to\infty} p_{F_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = x_j$ car $p_{F_j}(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\diamondsuit$

Corollaire 14 :

Si $\mathcal{H}$ *admet une base orthogonale dénombrable* $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$

Alors $\mathcal{H} = \overline{Vect\{w_i : i \in \mathbb{N}\}}$ *et* $\forall x \in \mathcal{H}, \quad \exists! c_i \in \mathbb{C} : \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i w_i \quad$ *où* $c_i =< x, w_i >$

Démonstration :

Soit $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale dénombrable. On pose $F_i = Vect\{(w_i)_{i\in\mathbb{N}}\}$

Par définition, $\forall i \neq j, \quad w_i \perp w_j$, donc $F_i \perp F_j$.

Les F_i étant des sous-espaces vectoriels fermés, d'après le théorème, $\overline{Vect\{w_i : i \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}$ par définition d'une base orthonormale.

Donc $\forall x \in \mathcal{H}, \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} p_{F_i}(x) \quad$ avec $p_{F_i}(x) =< x, w_i > w_i$.

$\diamondsuit$

IV.1 Espaces séparables

Définition 37 :

Un espace topologique X *est séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.*

Exemples :

$\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ sont séparables $\forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 16 :

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ *est séparable si et seulement s'il admet une base orthonormée au plus dénombrable.*

Démonstration :

Le cas fini est facile. On suppose que $\mathcal{H} \notin \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathcal{H}$ séparable. $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ dense.

On applique à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé de Gram-Schmidt.

On suppose $x_1 \neq 0$ et on pose $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$.

Supposons que nous avons construit la famille orthonormale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que $\exists m \geq n$: $(x_i)_{1\leq i\leq m} \subset Vect\{(e_i)_{1\leq i\leq n}\}$

$\exists k > m$ minimal tel que $x_k \notin Vect\{(e_i)_{1\leq i\leq n}\} = F_n$

On peut poser $F_{n+1} = Vect\{e_1, \dots, e_n, x_k\} = F_n \oplus (F_n^{\perp} \cap F_{n+1})$
Comme $p_{F_n}(x_k) \neq 0, \quad x_k - p_{F_n}(x_k) \perp F_n$
On pose $e_{n+1} = \dfrac{x_k - p_{F_n}(x_k)}{\|x_k - p_{F_n}(x_k)\|}$ Ainsi $F_{n+1} = Vect\{(e_i)_{1\leq i\leq n+1}\}$
Par itération, $(e_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale.
$F_{n+1} = Vect\{(x_i)_{1\leq i\leq k}\} \Longrightarrow Vect\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = Vect\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$
Donc $\mathcal{H} = \overline{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{Vect\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\}} \Longrightarrow (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthnormale dénombrable. Soit $F_n = Vect\{(e_i)_{1\leq i\leq n}\}$
Alors $\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$. Les F_n sont de dimension finie donc séparables.
En effet $Vect_{\mathbb{Q}}\{(e_i)_{1\leq i\leq n}\}$ est dense donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Vect_{\mathbb{Q}}\{(e_i)_{1\leq i\leq n}\}$ est dénombrable et dense dans $\mathcal{H}$.

$\diamondsuit$

Remarque :
On va voir qu'il existe à équivalence unitaire près un seul espace de Hilbert séparable par dimension (dimension infinie comprise).

Définition 38 :
Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert.
$\mathcal{U} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ est une application unitaire
$\Longleftrightarrow \mathcal{U}$ préserve le produit scalaire
$\Longleftrightarrow \forall x, y \in \mathcal{H}_1, \quad <\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(y)>_{\mathcal{H}_2} = <x, y>_{\mathcal{H}_1}$

Remarque :
$\mathcal{U}$ unitaire $\Longrightarrow \mathcal{U}$ isométrie. En effet,
$\forall x \in \mathcal{H}_1, \quad \|\mathcal{U}(x)\|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{<\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(x)>_{\mathcal{H}_2}} = \sqrt{<x, y>_{\mathcal{H}_1}} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}$
Plus précisement : $\mathcal{U}$ unitaire $\Longleftrightarrow \mathcal{U}$ isométrie surjective.

Remarque :
Si $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien alors
$\mathcal{U}$ est une application unitaire $\Longleftrightarrow \mathcal{U}$ est une transformation orthogonale.

Définition 39 :
Deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont unitairement équivalents $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{U} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ unitaire.

Rappel :
$\ell^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} < \infty\}$ muni du produit scalaire $<x, y> = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ ($<\infty$ d'après Hölder) est un espace de Hilbert.
ℓ^2 admet une base orthonormale : $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n}, 0, \dots)$ avec $<e_n, e_m> = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$
$\ell^2 = \overline{Vect\{(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\}}$ (exercice).

Théorème 17 :

Tout espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ de dimension infinie est unitairement équivalent à ℓ^2.

Démonstration :

La démonstration nétait pas completée en cours. Soit $\mathcal{H}$ séparable de dimension infinie. Alors il existe une base orthonormale dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose $\forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{U}(f_i) = e_i$. Alors pour $x = \sum_{=1}^{\infty} < x, f_i > f_i$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}\left(\sum_{i=1}^{n} < x, f_i > f_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} < x, f_i > \mathcal{U}(f_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} < x, f_i > e_i
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que les séries convergent et que $\mathcal{U}$ est en effet unitaire.

$\diamondsuit$

IV.2 Dualité des espaces de Hilbert

Proposition 11 :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

$$\begin{array}{cccc} l_x : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & y & \longmapsto & < y, x > \end{array}$$

$l_x \in \mathcal{H}^*$

Démonstration :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathcal{H}$ engendrée par le produit scalaire.

l_x est clairement linéaire.

$\|l_x\| = \sup_{\substack{y\in\mathcal{H}\\ y\neq 0}} \dfrac{|< y, x >|}{\|y\|} \leq \sup_{\substack{y\in\mathcal{H}\\ y\neq 0}} \dfrac{\|x\|\cdot\|y\|}{\|y\|} \Longrightarrow \|l_x\| \leq \|x\|$ donc l_x est continue.

$\diamondsuit$

Proposition 12 :

$$\begin{array}{cccc} \textit{Soit } l : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ & x & \longmapsto & l_x \end{array}$$

l est une isométrie antilinéaire.

Démonstration :

$\dfrac{|< y, x >|}{\|y\|} \leq \|l_x\|$ donc en particulier pour $y = x$ on obtient $\dfrac{|< x, x >|}{\|x\|} \leq \|l_x\| \Longrightarrow \|x\| \leq \|l_x\|$

On a vu que $\|l_x\| \leq \|x\|$, donc finalement $\|l_x\| = \|x\|$, *i.e.* l est une isométrie.

Soient $x, y, z \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
$$\begin{aligned}
l_{x+\lambda y}(z) &=< z, x + \lambda y > \\
&=< z, x > + \overline{\lambda} < z, y > \\
&= l_x(z) + \overline{\lambda} l_y(z)
\end{aligned}$$

Donc l est antilinéaire.

$\diamondsuit$

Lemme :

Soit $f \in \mathcal{H}^* \setminus \{0\}$. Alors $(Kerf)^\perp \simeq \mathbb{C}$ et $\exists x \in (Kerf)^\perp$ tel que $f(x) = \|x\|^2$. (En particulier, $(Kerf)^\perp = Vect\{x\}$)

Démonstration :

$f \neq 0 \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{H} : \quad f(x) \neq 0$ donc $Kerf \neq \mathcal{H}$ donc $(Kerf)^\perp \neq \{0\}$

Soient $x, z \in (Kerf)^\perp \setminus \{0\}, \quad z \neq x$. On pose $w = \dfrac{f(x)}{f(z)} z$

Donc $f(w) = \dfrac{f(x)}{f(z)} f(z) = f(x) \Longrightarrow w - x \in Kerf$

Avec la décomposition $\mathcal{H} = Kerf \oplus (Kerf)^\perp$, $x = x - w + w$.

Comme $x \in (Kerf)^\perp, \quad x - w = 0$. Donc z est multiple de x cad $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda x$.

Donc $(Kerf)^\perp = Vect\{x\} \simeq \mathbb{C}$.

Finalement, si $0 \neq z \in (Kerf)^\perp$, alors $x = \dfrac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$ et

$$f(x) = \frac{\overline{f(z)} f(z)}{\|z\|^2} = \frac{|f(z)|^2}{\|z\|^2} = \frac{|\lambda|^2 \cdot |f(x)|^2}{|\lambda|^2 \cdot \|x\|^2} \Longrightarrow f(x) = \|x\|^2$$

$\diamondsuit$

Théorème 18 :

$l : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$ est surjective.

Remarque :

Donc l est une bijection antilinéaire isométrique.

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{H}^* \setminus \{0\}$. D'après le lemme $\exists x \in (Kerf)^\perp : \quad f(x) = \|x\|^2 = < x, x > = l_x(x)$.

Donc $f_{|_{(Kerf)^\perp}} = l_x|_{(Kerf)^\perp}$ car f et l_x sont linéaires. $\mathcal{H} = Kerf \oplus (Kerf)^\perp = Ker\, l_x \oplus (Ker\, l_x)^\perp$

mais $Ker\, l_x = \{y \in \mathcal{H} : < y, x > = 0\} = \{x\}^\perp = Vect(\{x\}^\perp) = \big((Kerf)^\perp\big)^\perp = Kerf$

Donc $Ker\, l_x = Kerf$ et $(Ker\, l_x)^\perp = (Kerf)^\perp$.

$l_{x|_{Kerf}} = l_{x|_{Ker\, l_x}} = 0$ et $f_{|_{Kerf}} = 0$ donc $l_x = f$.

$\diamondsuit$

Corollaire 15 :

$\mathcal{H}$ est réflexif (c-à-d $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{**}$ est surjective).

Démonstration :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{l} & \mathcal{H}^* & \xrightarrow{l} & \mathcal{H}^{**} \\ x & \longmapsto & l_x & \longmapsto & l_{l_x} \end{array}$$

Soient $l_x, l_y \in \mathcal{H}^*$. On pose $< l_x, l_y > = < y, x >$.

C'est un produit scalaire car $< l_x + l_{x'}, l_y > = < y, x + x' > = < y, x > + < y, x' > = < l_x, l_y > + < l_{x'}, l_y >$

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{C}, \quad < \lambda l_x, l_y > &= < l_{\overline{\lambda} x}, l_y > \qquad \text{car l est antilinéaire}\\ &= < y, \overline{\lambda} x >\\ &= \lambda < y, x >\\ &= \lambda < l_x, l_y >\end{aligned}$$

$< l_x, l_x > = < x, x > = \|x\|^2 \geq 0$ et $< l_x, l_x > = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longleftrightarrow l_x = 0$.

De plus, $\|l_x\| = \sqrt{< l_x, l_x >}$

$$\text{Soit } \varphi \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{**} \\ x & \longmapsto & l_{l_x} \end{array}$$

φ surjective car l surjective. $(\varphi(x))(l_y) = l_{l_x}(l_y) = < l_y, l_x > = < x, y > = l_y(x) = i_x(l_y)$

Donc $\varphi(x) = i(x)$, donc $\varphi = i$.

$\Longrightarrow i$ surjective.

$\diamondsuit$

IV.3 L'adjoint d'une application $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Remarque :

$\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, parfois noté aussi $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Définition 40 :

$$T^* : \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^* & \longrightarrow & \mathcal{H}^* \\ f & \longmapsto & f \circ T \end{array} \qquad \textit{est l'application duale (ou transposée) de } T$$

Définition 41 :

L'adjoint $T^\dagger : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est définit par :* $\quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad < x, T^\dagger(y) > = < T(x), y >$

Remarque :

$< T(x), y > = l_y(T(x)) = \Big(\underbrace{T^*(l_y)}_{\in \mathcal{H}^*}\Big)(x)$

Donc $\exists z \in \mathcal{H}$ tel que $T^*(l_y) = l_z$. On a ainsi $< T(x), y > = l_z(x) = < x, z >$, d'où $z = T^\dagger(y)$.

Donc $T^*(l_y) = l_{T^\dagger(y)}$

Proposition 13 :

$T^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

Démonstration :

$< x, T^\dagger(\lambda x + y) > = < T(x), \lambda x + y > = \overline{\lambda} < T(x), x > + < T(x), y >$

$= \overline{\lambda} < x, T^\dagger(x) > + < x, T^\dagger(y) > = < x, \lambda T^\dagger(x) + T^\dagger(y) >$ donc $T^\dagger(\lambda x + y) = \lambda T^\dagger(x) + T^\dagger(y)$

D'où $T^\dagger$ est linéaire.

$\|T^\dagger\| = \sup\limits_{\substack{y \in \mathcal{H} \\ y \neq 0}} \dfrac{\|T^\dagger(y)\|}{\|y\|}$

Par Cauchy-Schwartz, $\|x\| \geq \dfrac{| < x, y > |}{\|y\|}$ $\quad$ (si $y \neq 0$) $\quad$ donc $\|x\| = \sup\limits_{\substack{y \in \mathcal{H} \\ y \neq 0}} \dfrac{| < x, y > |}{\|y\|}$

$\Longrightarrow \|T^\dagger\| = \sup\limits_{\substack{x, y \in \mathcal{H} \\ x, y \neq 0}} \dfrac{| < x, T^\dagger(y) > |}{\|y\| \cdot \|x\|} = \sup\limits_{\substack{x, y \in \mathcal{H} \\ x, y \neq 0}} \dfrac{| < T(x), y > |}{\|y\| \cdot \|x\|} = \|T\|$

Donc $\|T^\dagger\| = \|T\|$, d'où $T^\dagger$ est continue.

$\diamondsuit$

Lemme :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'une base dénombrable orthogonale $(e_i)_{i\in I}$ et une application $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

On note $T_{ij} =< e_i, T(e_j) >$ les coefficients matriciels de T.

Alors $(T^\dagger)_{ij} = \overline{T_{ji}}$

Démonstration :

$(T^\dagger)_{ij} =< e_i, T^\dagger(e_j) >=< T(e_i), e_j >= \overline{< e_j, T(e_i) >} = \overline{T_{ji}}$

$\diamondsuit$

Rappel :

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach.

Proposition 14 :

Prendre l'adjoint est une involution antilinéaire.

c-à-d

i) $(TS)^\dagger = S^\dagger T^\dagger$

ii) $(T^\dagger)^\dagger = T$

iii) $(\lambda T + S)^\dagger = \overline{\lambda} T^\dagger + S^\dagger$

De plus $(Ker\, T)^\perp = \overline{Im(T^\dagger)}$

Démonstration :

La première partie est laissée en exercice.

$\forall y \in \mathcal{H}, \quad < T(x), y >= 0 \Longleftrightarrow T(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in Ker\, T$

$\Longleftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}, \quad < x, T^\dagger(y) >= 0$

$\Longleftrightarrow x \in (Ker\, T^\dagger)^\perp$

Donc $Ker\, T = (Im\, T^\dagger)^\perp$

Donc $(Ker\, T)^\perp = ((Im\, T^\dagger)^\perp)^\perp = \overline{Im\, T^\dagger}$

$\diamondsuit$

Rappel :

La topologie faible sur $\mathcal{H}$ est la topologie faible engendrée par la famille $\mathcal{H}^* = \{l_y : y \in \mathcal{H}\}$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. D'après le deuxième lemme de la section III.2,

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x &\Longleftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}, \quad l_y(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l_y(x) \\ &\Longleftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}, \quad < x_n, y > \xrightarrow[n\to\infty]{} < x, y > \end{aligned}$$

Proposition 15 :

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

i) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathcal{H}$, *alors* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x$

ii) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x$ *et* $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$, *alors* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

iii) Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x$ *alors* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Démonstration : i) Application de Cauchy-Schwarz.

ii) On utilise $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\Re(< x, x_n >) + \|x\|^2$
Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau_{faible}} x$ alors $< x, x_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2$ donc $\|x_n - x\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim\limits_{n\to\infty} (\|x_n\|^2 - \|x\|^2) = 0$

iii) On regarde la famille $(l_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Par hypothèse, $\forall y \in \mathcal{H}, \quad l_{x_n}(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} l_x(y)$
Donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $(l_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément majorée, *i.e.*
$\exists c : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|l_{x_n}\| \leq c$
Donc $\exists c : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| \leq c$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$\diamondsuit$

V Complétion des espaces métriques

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Existe-t-il un espace complet $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ dont E est un sous-espace vectoriel dense ?
Plus précisement, existe-t-il un espace de Banach $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ et une application linéaire (isométrique) $\varphi : E \hookrightarrow \tilde{E}$ telle que $\varphi(E)$ soit dense dans $\tilde{E}$?

Proposition 16 :
Si un tel couple (E, φ) *existe, alors il est unique à isomorphisme près. On l'appelle la completion de* E

Démonstration :
Supposons qu'il existe (E, φ) et (F, ψ) tels que E et F soient des espaces de Banach, et des isométries linéaires φ, ψ telles que $\psi(E)$ soit dense dans F.

$$\text{Alors} \quad \begin{array}{l} \lambda = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(E) \longrightarrow \psi(E) \\ \mu = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(E) \longrightarrow \varphi(E) \end{array} \quad \text{Sont des isométries linéaires et} \quad \begin{array}{l} \lambda \circ \mu = Id_{|\varphi(E)} \\ \mu \circ \lambda = Id_{|\psi(E)} \end{array}$$

λ et μ sont continues et possèdent un unique prolongement continu :

$$\begin{array}{l} \overline{\lambda} : \overline{\varphi(E)} = \tilde{E} \longrightarrow \overline{\psi(E)} = F \\ \overline{\mu} : \overline{\psi(E)} = F \longrightarrow \overline{\varphi(E)} = \tilde{E} \end{array} \quad \text{et de plus} \quad \begin{array}{l} \overline{\lambda} \circ \overline{\mu} = Id_{|F} \\ \overline{\mu} \circ \overline{\lambda} = Id_{|\tilde{E}} \end{array}$$

Donc $\overline{\lambda}$ est un isomorphisme entre $\tilde{E}$ et F qui a $\overline{\mu}$ comme inverse.
De plus $\overline{\lambda}$ est isométrique car prolongement d'une isométrie.

$\diamondsuit$

Proposition 17 :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors il existe $(\tilde{E}, \varphi)$ tels que $\varphi(E)$ est dense dans $\tilde{E}$ et φ est une isométrie linéaire.

Démonstration :
Soit (E, d) un espace métrique. On pose $\mathcal{C}(E) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E : (x_n) \text{ est une suite de Cauchy}\}$
On définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{C}(E)$ $\quad (x_n)_n \sim (y_n)_n \iff d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Remarque : La transitivé de $\sim$ découle de l'inégalité triangulaire.
On pose $\tilde{E} = \mathcal{C}(E)/\sim = \{[(x_n)_n] : (x_n)_n \in \mathcal{C}(E)\}$. Remarque : il n'est pas évident d'y associer une métrique/topologie raisonnable.

$$\text{Soit } \tilde{d} : \begin{array}{ccc} \tilde{E}\times\tilde{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ ([(x_n)_n], [(y_n)_n]) & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \end{array}$$

$$\text{Si } (x'_n)_n \in [(x_n)_n], \text{ alors } \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y_n) \begin{aligned}[t] &\leq \lim_{n\to\infty} [d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n)] \\ &\leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)}_{=0} + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \end{aligned}$$

De même $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y_n)$ donc si ces limites existent, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.
Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ et que $\tilde{d}$ est une métrique est laissé en exercice.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \tilde{E} \\ x & \longmapsto & [(x_n)_n] \end{array} \quad \text{avec } (x_n)_n = (x, x, \dots)$$

φ est dense. En effet, si $(x_n)_n \in \mathcal{C}(E)$, alors $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N_\epsilon : \quad \forall n, m \geq N_\epsilon, \quad d(x_n, x_m) < \epsilon$
De même, $\forall n \geq N_\epsilon, \quad \lim\limits_{m\to\infty} d(x_n, x_m) < \epsilon$.
Donc $\tilde{d}(\varphi(x_{N_\epsilon}), [(x_n)_n]) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{N_\epsilon}, x_n) \leq \epsilon$. Donc $\varphi(E)$ est dense dans $\tilde{E}$.
φ est clairement linéaire. Soient $x, y \in E$.
$\tilde{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$ donc φ est isométrique.

$\diamondsuit$

Lemme :
$(\tilde{E}, \tilde{d})$ est complet.

Démonstration :
Soit $(\tilde{\xi}_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\tilde{E}$.
Par densité de $\varphi(E)$, $\quad \forall n \geq 1, \quad \exists x_n \in E : \quad \tilde{d}(\varphi(x_n), \tilde{\xi}_n) < \frac{1}{n}$
Ainsi on construit une suite $(x_n)_n$ telle que :

$$d(x_n, x_m) = \tilde{d}(\varphi(x_n), \varphi(x_m)) \begin{aligned}[t] &\leq \tilde{d}(\varphi(x_n), \tilde{\xi}_n) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_n, \tilde{\xi}_m) + \tilde{d}(\tilde{\xi}_m, \varphi(x_m)) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \tilde{d}(\tilde{\xi}_m, \tilde{\xi}_n) \end{aligned}$$

$$(\tilde{\xi}_n)_n \text{ de Cauchy} \begin{aligned}[t] &\implies (x_n)_n \text{ de Cauchy.} \\ &\iff [(x_n)_n] \in \tilde{E} \end{aligned}$$

Montrons que $\tilde{\xi}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} [(x_n)_n]$:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{\xi}_k, [(x_n)_n]) &\leq \tilde{d}(\tilde{\xi}_k, \varphi(x_k)) + \tilde{d}(\varphi(x_k), [(x_n)_n]) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} d(x_k, x_n)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{}0 \text{ car } (x_n)_n \text{ Cauchy.}}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{k\to\infty} \tilde{\xi}_k = [(x_n)_n]$. Donc $(\tilde{E}, \tilde{d})$ est complet.

$\diamondsuit$

Lemme :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors cette construction donne une application φ linéaire.

Remarque :

Cette construction est particulièrement utile pour les espaces vectoriels semi-normés.

Rappel :

$p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si et seulement si :

i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x \in E, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

ii) $\forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Remarque :

Une norme est une semi-norme de noyau trivial.

On peut aussi compléter un espace semi-normé (E, p) de la même manière qu'un espace vectoriel normé (une suite de Cauchy $(x_n)_n$ pour p est telle que $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \quad \forall n, m \geq N : \quad p(x_n - x_m) < \epsilon$).
Mais dans ce cas φ reste linéaire mais n'est plus injective car $Ker\,\varphi = Ker\,p \neq \{0\}$ car p est une semi-norme.

Donc on procède plutôt sur $E/_{Ker\,p}$ car p induit ainsi une norme $\|\cdot\| : E/_{Ker\,p} \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

VI Espaces L^p

Définition 42 :

Soit un ensemble Ω.

Une tribu $\mathcal{B}$ *est un ensemble de parties de* Ω, i.e. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *tel que*

i) $\varnothing \in \mathcal{B}$

ii) $A \in \mathcal{B} \Longrightarrow \complement_\Omega A = A^c \in \mathcal{B}$

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$

Exemple :

Soit (Ω, τ) un espace topologique tel que la topologie $\tau \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Il existe une plus petite tribu contenant τ. C'est la tribu Borelienne.

Définition 43 :

Une mesure μ *est une application définie sur une tribu* $\mathcal{B}$ *telle que :*

i) $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$

ii) $\mu(\varnothing) = 0$

iii) Si I *est un ensemble au plus dénombrable et* $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ *telle que* $\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$, *alors*
$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

Définition 44 :

Un ensemble Ω *muni d'une tribu* $\mathcal{B}$ *et d'une mesure* μ *est un espace mesuré, noté* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$.

Définition 45 :

Soit E *un espace de Banach et* $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré.*

$f : \Omega \longrightarrow E$ *est une fonction en escalier*

$\Longleftrightarrow$ *Il existe une partition finie de* Ω *(*i.e. $(A_i)_{1\le i\le n} : \forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$ *et* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*) telle que :*

i) $f_i = f_{|A_i}$ *est constante*

ii) $\mu(supp(f)) < \infty \qquad$ *(donc* $\forall f_i \neq 0$, *les* A_i *sont de mesure finie.)*

On note cet ensemble $\mathcal{E}(\Omega, \mu, E) = \mathcal{E}(\Omega)$

Remarque :

$\mathcal{E}(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Si $f, g \in \mathcal{E}(\omega)$ alors $f + g \in \mathcal{E}(\Omega)$.

En effet, si l'on note $(A_i)_{i\in I}, (A'_i)_{i\in I}$ leurs partitions associées respectives, alors $\forall B, C \in \mathcal{B}, B - C = B \setminus (B \cap C) \in \mathcal{B}$ et on peut ainsi "raffiner" les partitions.

Définition 46 :

$$\begin{array}{rccl} p : & \mathcal{E}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\|f_i\|_E \end{array} \quad \textit{est une semi-norme}$$

Définition 47 :

Soit E un espace de Banach.

$(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1) = (L^1(\Omega,\mu,E), \|\cdot\|_1)$ *est le complété de* $(\mathcal{E}(\Omega), p)$ *:*

Notons $\mathcal{CE}(E) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(E)$ *suites de Cauchy pour la semi-norme* $p\}$.

Alors avec $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n - y_n) = 0$

On obtient $L^1(\Omega,E) = \mathcal{CE}(E)/\sim$ *complet pour la norme* $\|[(x_n)_n]\|_1 = \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n)$

Chaque suite de $\mathcal{E}(\Omega)$ *étant de la forme* $x_n = \sum\limits_{i=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}} f_i^{(n)}$ *avec* $A_i^{(n)} \subset \Omega$ *et* $f_i^{(n)} \in E$,

on a $p(x_n) = \sum\limits_{i=1}^{N_n} \mu(A_i^{(n)}) \|f_i^{(n)}\|_E$

Remarque :

Le but consiste à interpréter les éléments de $L^1(\Omega)$ comme des fonctions de Ω dans E et ainsi d'y prolonger l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \int : & \mathcal{E}(\Omega) & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) f_i \end{array} \qquad \|\int f\| \leq p(f)$$

Définition 48 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\Omega,E) &= \{f : \Omega \longrightarrow E \text{ limite presque partout } (p\forall x) \text{ d'une suite de Cauchy de } \mathcal{E}(\Omega,E)\} \\ &= \{f : \Omega \longrightarrow E : \ \exists A \subset \Omega,\ \mu(A) = 0,\ \text{et} \quad (f_n)_n \subset \mathcal{CE}(\Omega,E) \ \text{ tq } \forall x \in A^c, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\} \end{aligned}$$

Lemme :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{CE}(\Omega,E)$. *Alors* $\exists (f_{n_k})_k$ *telle que*

i) $p\forall x \in \Omega, \quad (f_{n_k}(x))_k$ *converge dans* E

ii) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists Z \subset \Omega,\ \mu(Z) < \epsilon$ *tel que* $(f_{n_k|Z^c})_k$ *converge uniformément.*

Démonstration :

$(f_n)_n$ Cauchy dans $\mathcal{E}(\Omega,E)$ pour la semi-norme $p \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists N_k > 0 : \quad \forall n,m \geq N_k, \quad p(f_n - f_m) < \dfrac{1}{2^{2k}}$

On peut supposer que $N_{k+1} > N_k$. On pose $g_k = f_{N_k}$ Ainsi $(g_k)_k$ est une sous-suite de $(f_n)_n$.

Soit $S = g_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k)$

Soit $Y_n = \{x \in \Omega : \|g_{n+1}(x) - g(x)\|_E \geq \dfrac{1}{2^n}\} \subset \Omega$, ensemble mesurable et de mesure finie car g_n est une fonction en escalier.

$$\frac{1}{2^n}\mu(Y_n) = \int_\Omega \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{Y_n}(x) d\mu(x) \leq \int_\Omega \|g_{n+1}(x) - g_n(x)\|_E d\mu(x) = p(g_{n+1} - g_n) \leq \frac{1}{2^{2n}} \Longrightarrow \mu(Y_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

On pose $Z_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} Y_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} \subset Z_n$

$$\Longrightarrow \mu(Z_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(Z_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Soit $x \in Z_n^c$. Alors $\forall k \geq n, \quad x \in Z_k^c$ donc $\forall k \geq n, \quad \|g_{k+1}(x) - g_k(x)\|_E < \dfrac{1}{2^k}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S$ converge absolument (donc uniformément) sur Z_n^c
$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad (g_k)_k$ converge uniformément sur Z_n^c (ii)
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n) \leq \mu(Z_k) \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ est de mesure nulle.
$\forall x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n, \quad \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in Z_k^c \Longrightarrow (g_k(x))_k$ converge (i).

$\diamondsuit$

Lemme :

Soient $(g_n)_n, (h_n)_n \in \mathcal{CE}(\Omega, E)$ *et* $f : \Omega \longrightarrow E$ *telle que* $p\forall x \in \Omega, \quad \begin{array}{l} g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \\ h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \end{array}$

Alors $(g_n)_n \sim (h_n)_n \qquad (\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p(g_n - h_n) = 0)$.

Démonstration :
On pose $\delta_n = g_n - h_n$. Alors $(\delta_n)_n \in \mathcal{CE}(\Omega, E)$.
On sait que $p\forall x \in \Omega, \quad \delta_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) - f(x) = 0$. Montrons que $p(\delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Soit $\epsilon > 0$ et N tels que $\forall n, m \geq N : \quad p(\delta_n - \delta_m) < \epsilon$

$\boxed{\text{Etape 1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_n$ est en escalier, donc $\mu(supp(\delta_n)) < \infty$
$\exists A \subset \Omega$ mesurable et de mesure finie tel que $\delta_{N|A^c} \equiv 0$
$$\int_\Omega \|\delta_n\|_E \mathbb{1}_{A^c}(x) d\mu(x) = \int_\Omega \|\delta_n - \delta_N\|_E \mathbb{1}_{A^c}(x) d\mu(x) \leq \int_\Omega \|\delta_n - \delta_N\|_E d\mu(x) = p(\delta_n - \delta_N) < \epsilon$$

$\boxed{\text{Etape 2}}$ $(\delta_n)_n$ est une suite de Cauchy de fonctions en escalier, donc d'après le ii) du lemme, $\exists Z \subset \Omega$ tel que $\mu(Z) = \dfrac{\epsilon}{1 + \|\delta_N\|_\infty}$ où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E$, et tel que $\forall x \in Z^c, \quad (\delta_{n_k})_k$ converge uniformément ($\|\delta_N\|_\infty < \infty$ car δ_N est en escalier).
Comme $p\forall x \in \Omega, \quad \delta_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\delta_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ uniformément sur Z^c.
Donc $\exists M > 0, \quad \forall k \geq M, \quad \|\delta_{n_k}(x)\|_E < \epsilon \quad \forall x \in Z^c$
$$\int_\Omega \|\delta_{n_k}(x)\|_E \mathbb{1}_{A\setminus Z\cap A}(x) d\mu(x) \leq \mu(A) \sup_{x\in Z^c} \|\delta_{n_k}(x)\|_E \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$
Donc $\exists \tilde{M} : \quad \forall k \geq \tilde{M} : \quad \int_\Omega \|\delta_{n_k}(x)\|_E \mathbb{1}_{A\setminus Z\cap A}(x) d\mu(x) < \epsilon$

$\boxed{\text{Etape 3}}$
$$\begin{aligned} \int_\Omega \|\delta_{n_k}(x)\|_E \mathbb{1}_{Z\cap A}(x) d\mu(x) &\leq \int_\Omega \|\delta_{n_k}(x) - \delta_N(x)\|_E \mathbb{1}_{Z\cap A}(x) d\mu(x) + \int_\Omega \|\delta_N(x)\|_E \mathbb{1}_{Z\cap A}(x) d\mu(x) \\ &\leq p(\delta_{n_k} - \delta_N) + \|\delta_N\|_\infty \mu(Z) \\ &< 2\epsilon \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Etape 4}}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } p(\delta_{n_k}) &= \int_\Omega \|\delta_{n_k}(x)\|_E d\mu(x)\\ &= \underbrace{\int_\Omega \|\delta_n(x)\|_E \mathbb{1}_{A^c}(x)d\mu(x)}_{<\epsilon \text{ (Etape 1)}} + \underbrace{\int_\Omega \|\delta_n(x)\|_E \mathbb{1}_{Z\cap A}(x)d\mu(x)}_{<\epsilon \text{ (Etape 2)}} + \underbrace{\int_\Omega \|\delta_n(x)\|_E \mathbb{1}_{A\setminus Z\cap A}(x)d\mu(x)}_{<2\epsilon \text{ (Etape 3)}}\end{aligned}$$

Donc $p(\delta_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Comme $(\delta_n)_n$ est de Cauchy, $p(\delta_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

♢

Corollaire 16 :

Soient $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ et $(f_n)_n \subset \mathcal{E}(E)$ telle que p$\forall x \in \Omega, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Alors $\displaystyle\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)d\mu(x)$ est un prolongement de l'intégral bien défini.

Démonstration :

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)d\mu(x)$ existe car $\displaystyle\left(\int_\Omega f_n(x)d\mu(x)\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet.

En effet, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N :$

$\displaystyle\| \int_\Omega f_n(x)d\mu(x) - \int_\Omega f_m(x)d\mu(x)\|_E \leq \int_\Omega \|f_n(x) - f_m(x)\|_E d\mu(x) = p(f_n - f_m) < \epsilon.$

Soient $(g_n)_n, (h_n)_n \in \mathcal{CE}(\Omega, E)$ et $\delta_n = g_n - h_n$ telles que $\begin{array}{l} g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \\ h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \end{array}$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x)d\mu(x) - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \delta_n(x)d\mu(x)$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \| \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x)d\mu(x) - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)d\mu(x)\|_E &\leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n(x) - h_n(x)\|_E d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\delta_n(x)\|_E d\mu(x)\\ &= 0 \qquad \text{(d'après le second lemme)}\end{aligned}$$

♢

Proposition 18 :

Soient $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ et $(f_n)_n \subset \mathcal{E}(\Omega, E)$ qui converge presque partout vers f.

Alors $\|f\|_E \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}) \quad$ et $\displaystyle\int_\Omega \|f(x)\|_E d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(x)\|_E d\mu(x)$.

Démonstration :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \in \mathcal{E}(\Omega, E)$ donc $\|f_n\|_E \in \mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R})$

De plus $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \Longrightarrow \|f_n(x)\|_E = \|f(x)\|_E$

On montre que $(\|f_n\|_E)_n$ est une suite de Cauchy comme précédement.

Donc $\|f\|_E = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_E \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$

Et s'ensuit que $\displaystyle\int_\Omega \|f(x)\|_E d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n(x)\|_E d\mu(x).$

♢

Remarque :

$\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ est un espace vectoriel et $\displaystyle\int \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1(\Omega, E))$.

Définition 49 :

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathcal{L}^1(\Omega,E) & \twoheadrightarrow & L^1(\Omega,E) \\ & f & \longmapsto & [(f_n)_n] \qquad \textit{où } (f_n)_n \in \mathcal{CE}(\Omega,E): \quad \forall x\in\Omega, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x). \end{array}$$

Remarque :

D'après le second lemme, γ est bien définie, *i.e.* $\gamma(f)$ ne dépend pas du choix de $(f_n)_n$.

De plus γ est linéaire, et surjective d'après le premier lemme.

Enfin, $\|\gamma(f)\|_1 = \|[(f_n)_n]\|_1 := \lim_{n\to\infty} p(f_n) = p(f)$

Quel est son noyau ?

$$\begin{aligned} f \in Ker\,\gamma &\iff \|\gamma(f)\|_1 = 0 \qquad (\text{car } \|\cdot\|_1 \text{ est une norme}) \\ &\iff f \in Ker\,p \end{aligned}$$

Définition 50 :

On note $\mathcal{N}(\Omega,E) := \{f \in \mathcal{L}^1(\Omega,E): \quad p\forall x, \quad f(x)=0\}$.

Remarque :

$\mathcal{N}(\Omega,E)$ est un espace vectoriel

Théorème 19 :

$\operatorname{Ker} p = \mathcal{N}(\Omega,E)$.

Corollaire 17 :

γ *induit un isomorphisme isométrique* $\bar{\gamma}: \mathcal{L}^1(\Omega,E)\diagup_{\mathcal{N}(\Omega,E)} \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow L^1(\Omega,E)$

Remarque :

Le quotient est muni de la norme $\|[f]\| = \inf_{g\in\mathcal{N}(\Omega,E)} p(f+g)$.

Démonstration :

[du corollaire] $\mathcal{N}(\Omega,E) = Ker\,p = Ker\,\gamma$ donc l'isomorphisme est clair.

$\|\bar{\gamma}(f)\|_1 = p(f) = \inf_{g\in Ker\,p} p(f+g) = \|[f]\|$ donc $\bar{\gamma}$ est isométrique.

$\diamondsuit$

Pour la démonstration du theorem nous avons d'abord besoin de renforcer le premier lemme.

Proposition 19 :

Soit $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^1(\Omega,E)$ *une suite de Cauchy pour la semi-norme* p *qui converge vers* $f\in\mathcal{L}^1(\Omega,E)$ *pour la semi-norme* p, i.e. $\lim_{n\to\infty} p(f_n - f) = 0$.

Alors $\exists (f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ *telle que* $p\forall x, \quad f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$

De plus, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists Z\subset\Omega, \mu(Z)<\epsilon, \quad f_{n_k|_{Z^c}} \xrightarrow[k\to\infty]{} f_{|_Z^c}$ *uniformément.*

Démonstration :

Quitte à remplacer f_n par $f_n - f$ on peut supposer que $f\equiv 0$.

De la même manière que pour le premier lemme, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists N_k : \quad \forall n \geq N_k : \quad p(f_n - 0) < \frac{1}{2^{2k}}$.
On suppose $N_{k+1} > N_k$. On pose $g_k = f_{N_k}, \quad Y_n = \{x \in \Omega : \|g_n(x)\|_E \geq \frac{1}{2^n}\}$
On peut supposer que les fonctions g_k sont mesurables[2] quitte à les changer sur un ensemble de mesure nulle.
On peut ainsi procéder de la même manière que pour le premier lemme.

$\diamondsuit$

Démonstration :
[du théorème] Soit $f \in Ker\, p$ et $(f_n)_n \subset \mathcal{E}(\Omega, E)$ telle que $f_n \equiv 0$. Alors $p(f_n) = 0$ donc $p(f_n - f) = 0$.
Donc $p(f_n - f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $(f_n)_n$ est de Cauchy et converge vers f (pour la semi-norme p).
D'après la proposition, $\exists (f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ telle que $p\forall x \in \Omega, \quad f_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$
Mais $\forall x \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{n_k}(x) = 0$ donc $p\forall x \in \Omega, \quad f(x) = 0$. Donc $f \in \mathcal{N}(\Omega, E)$.
$\mathcal{N}(\Omega, E) \subset \mathrm{Ker}\, p$ est clair.

$\diamondsuit$

Théorème 20 (admis):
Convergence dominée de Lebesgue :
Soit $(f_n)_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$. *On suppose que* $\exists g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}), \quad g \geq 0$ *et telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_E \leq g$.
On suppose que $\exists f : \Omega \longrightarrow E$ *telle que* $p\forall x, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.
Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E), \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} f$ *et* $\int_\Omega f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)d\mu(x)$

Corollaire 18 :
Soit $f : \Omega \longrightarrow E$.
$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E) \iff f$ *mesurable et* $\|f\|_E \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$

Démonstration : $\boxed{\Longrightarrow}$

Découle de la proposition 19.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$\diamondsuit$

VI.1 Définition et proprietés des espaces L^p

Définition 51 :
Soit $1 < p < \infty$. $\mathcal{L}^p(\Omega, E) = \{f : \Omega \longrightarrow E : f$ *mesurable et* $\|f\|_E^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})\}$.

Définition 52 :
L'exposant conjugué (ou dual) de p *est* $q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$

[2] $f : \Omega \longrightarrow E$ est mesurable $\iff \forall B \subset E$ mesurable, $f^{-1}(B) \subset \Omega$ est mesurable. Dans ce contexte on a le téorème suivant (admis) :
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans E qui convergent vers f. Alors il existe une fonction mesurable $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f} \equiv f$ presque partout.

Lemme :

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1 < p < \infty$ *et* q *son conjugué. Alors*

i) $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

ii) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^q)$

Démonstration : i) Soit $t \geq 1$.

$t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$ car en effet $t = 1 \Longrightarrow 1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\frac{d}{dt} t^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p} t^{-\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{p} + \frac{1}{q}\right)$

Supposons $a \geq b$. Alors $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\frac{a}{b}}{p} + \frac{1}{q}$

$\Longleftrightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

$\Longleftrightarrow a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

ii) Laissé en exercice.

$\diamondsuit$

Théorème 21 :

Soit $1 < p < \infty$.

Alors $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ *est un espace vectoriel et* $\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(x)\|_E^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ *est une semi-norme.*

De plus, si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, E)$ *avec* p *et* q *conjugués, alors* $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ *et on a l'inégalité de Hölder :* $\int_\Omega \|f(x)\|_E \|g(x)\|_E d\mu(x) \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Démonstration :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ et $c \in \mathbb{K}$.

$f_1 + cf_2$ est mesurable et $\|f_1 + cf_2\|_E^p \leq (\|f_1\|_E + |c| \cdot \|f_2\|_E)^p \overset{ii)}{\leq} \underbrace{\|f_1\|_E^p}_{\in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})} + |c|^p \underbrace{\|f_2\|_E^p}_{\in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})}$

$\Longrightarrow \|f_1 + cf_2\|_E^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$

$\Longrightarrow f_1 + cf_2 \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$

Si f ou $g \in \mathcal{N}(\Omega, E)$ alors l'inégalité est triviale. Sinon, $f, g \notin \mathcal{N}(\Omega, E) \Longrightarrow \|f\|_E, \|g\|_E \notin \mathcal{N}(\Omega, \mathbb{R})$

Donc $\|f\|_p \neq 0$ et $\|g\|_q \neq 0$.

D'après le lemme appliqué à $a = \frac{\|f\|_E^p}{\|f\|_p^p}, b = \frac{\|g\|_E^q}{\|g\|_q^q}$ on a :

$\frac{\|f\|_E}{\|f\|_p} \frac{\|g\|_E}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_E^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|g\|_E^q}{\|g\|_q^q}$ donc $\|f\|_E \|g\|_E \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}) \Longrightarrow fg \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_\Omega \|f(x)\|_E \|g(x)\|_E d\mu(x) \quad &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega \|f(x)\|_E^p d\mu(x)}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega \|g(x)\|_E^q d\mu(x)}{\|g\|_q^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1\end{aligned}$$

Les conditions de nullité et d'homogénéité de $\|\cdot\|_p$ sont claires, vérifions l'inégalité triangulaire :

$f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p(\Omega, E), \quad \|f_1 + f_2\|_E^p \leq (\|f_1\|_E + \|f_2\|_E)\|f_1 + f_2\|_E^{p-1}$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \|f_1 + f_2\|_p^p &\leq \int_\Omega \|f_1(x)\|_E \|f_1(x) + f_2(x)\|_E^{p-1} d\mu(x) + \int_\Omega \|f_2(x)\|_E \|f_1(x) + f_2(x)\|_E^{p-1} d\mu(x)\\ &\leq (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)\left(\int_\Omega \|f_1(x) + f_2(x)\|_E^{p-1})^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)\|f_1 + f_2\|_p^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Remarque :

$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\Omega, E) \longrightarrow \mathbb{R}$ étant une semi-norme, elle induit la norme

$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\Omega, E)/_{Ker\,\|\cdot\|_p} = \mathcal{L}^p(\Omega, E)/_{\mathcal{N}(\Omega,E)} \longrightarrow \mathbb{R}$

car $f \in \mathcal{N}(\Omega, E) \iff \|f\|_E \in \mathcal{N}(\Omega, \mathbb{R}) \iff \|f\|_E^p \in \mathcal{N}(\Omega, \mathbb{R}) \iff f \in Ker\,\|\cdot\|_p$

Lemme (de Fatou):

Soit $(g_n)_n \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}), \quad g_n \geq 0.$

Alors $\|\liminf_{n\to\infty} g_n\|_1 = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x) d\mu(x).$

Remarque :

Si $\liminf_{n\to\infty} g_n$ existe, alors $\liminf_{n\to\infty} g_n > 0$ d'où $\int_\Omega |\liminf_{n\to\infty} g_n(x)| d\mu(x) = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n(x) d\mu(x)$

Théorème 22 (Fischer-Riesz):

$L^p(\Omega, E) = \mathcal{L}^p(\Omega, E)/_{\mathcal{N}(\Omega,E)}$ *est complet pour la norme* $\|\cdot\|_p$

Démonstration :

Soit $(\varphi_n)_n \subset L^p(\Omega, E)$ une suite de Cauchy.

$\forall n \in \mathbb{N}$, On considère $f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ telle que $[(f_n)_n] = \varphi_n$

Quitte à modifier f_n sur un ensemble de mesure nulle (ce qui ne change pas sa classe), on peut supposer f_n mesurable.

Comme pour les démonstrations des lemmes et propositions précédentes, on montre que

$\exists (f_{n_k})_k \subset (f_n)_n$ telle que $(f_{n_k})_k$ converge presque partout dans E.

Soit $Z \subset \Omega$ de mesure nulle tel que $\forall x \in Z^c, \quad (f_{n_k}(x))_k$ converge.

On définit $f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & \text{Si } x \in Z^c \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \end{array}$

Reste à montrer que $[f] \in L^p(\Omega, E)$ et $\|[f] - \varphi_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (*i.e.* $\|f - f_{n_k}\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$).

Soit m fixé. On pose $g_n(x) = \|f_n(x) - f_m(x)\|_E^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} g_n \geq 0 \Longrightarrow \left\| \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_E^p \right\|_1 &\leq \liminf_{n\to\infty} \left\| \|f_n - f_m\|_E^p \right\|_1 \quad (*)\\ &= \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p^p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

De plus, $p\forall x \in \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f_m(x)\|_E^p = \|f(x) - f_m(x)\|_E^p \quad (**)$

Donc $\forall \epsilon > 0, \quad \exists m_0, \quad \|f - f_m\|_p^p \overset{(**)}{=} \left\| \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_E^p \right\|_1 \overset{(*)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p^p$
$< \epsilon$ car $(f_n)_n$ est de Cauchy.

Donc $\|f - f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$

$\diamondsuit$

VI.2 Densité des fonctions continues à support compact

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, muni de la tribu Borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Définition 53 :
$\mathcal{C}_c(\Omega, E) = \{f : \Omega \longrightarrow E$ *continues à support compact*$\}$

Remarque :
$f \in \mathcal{C}_c(\Omega, E) \Longrightarrow f$ bornée $\Longrightarrow \|f\|_E^p < \infty$ et $\displaystyle\int_\Omega \|f\|_E^p \leq \mu(Supp(f))\|f\|_\infty$ avec $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E$.
Donc $\mathcal{C}_c(\Omega, E) \subset \mathcal{L}^p(\Omega, E)$
Comme $f \in \mathcal{C}_c(\Omega, E) \cap \mathcal{N}(\Omega, E) \Longrightarrow f \equiv 0$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c(\Omega, E) & \longrightarrow & L^p(\Omega, E) \\ f & \longmapsto & [f] = f + \mathcal{N}(\Omega, E) \end{array}$$ est linéaire et injective

Théorème 23 :
$\mathcal{C}_c(\Omega, E)$ est dense dans $L^p(\Omega, E)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Remarque :
Attention, ceci est un abus de langage car $\forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E), \forall \epsilon > 0, \quad \exists h \in \mathcal{C}_c(\Omega, E)$ telle que $\|f - h\|_p < \epsilon$.

Démonstration :

$\boxed{\text{Etape 1}}$ Soit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ et $(g_n)_n \subset \mathcal{E}(\Omega, E)$ telle que $\|g_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Soit $\epsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_{n_0} - f\|_p < \epsilon$. Posons $g = g_{n_0}$.
Alors $g = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i \subset \Omega$ tel que $\mu(A_i) < \infty$ et $\forall 1 \leq i \leq n_0, \quad \lambda_i \in E$.
$\mu(A_i) = \displaystyle\int_\Omega \mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x) \leq \int_\Omega \frac{\|g(x)\|_E}{\|\lambda_i\|_E} d\mu(x) \leq$.

$\boxed{\text{Etape 2}}$ La mesure de Lebesgue μ est régulière, *i.e.* $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et de mesure finie, $\forall \delta > 0, \quad \exists K \subset A$ compact et $\exists U$ ouvert contenant A tel que $\mu(U \setminus K) < \delta$.
$K \subset A \subset U$. Soient V un ouvert contenant K tel que $\overline{V}$ soit compact. D'après le lemme d'Urysohn appliqué à K et V^c, il existe une application continue à support compact $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ telle que $\alpha_{|_K} \equiv 1, \quad \alpha_{|_V^c} \equiv 0$

$\boxed{\text{Etape 3}}$ On applique l'étape 2 à $A = A_i$ et $\delta = \dfrac{\epsilon}{n_0 \|\lambda_i\|_E^p}$, ce qui nous donne $\alpha_i \in \mathcal{C}_c(\Omega, [0,1])$

On peut supposer que $V \subset U$ quitte à prendre $V \cap U$. On pose $h = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \alpha_i \in \mathcal{C}_c(\Omega, E)$

$$\|g-h\|_p = \|\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i(\mathbb{1}_{A_i} - \alpha_i)\|_p \leq \sum_{i=1}^{n_0} \|\lambda_i(\mathbb{1}_{A_i} - \alpha_i)\|_p$$

$$\Longrightarrow \|g-h\|_p^p \leq \sum_{i=1}^{n_0} \int_\Omega \|\lambda_i(\mathbb{1}_{A_i}(x) - \alpha_i(x))\|_E^p d\mu(x) \leq \sum_{i=1}^{n_0} \|\lambda_i\|_E^p \int_\Omega |\mathbb{1}_{A_i}(x) - \alpha_i(x)|^p d\mu(x)$$

$$\mathbb{1}_{A_i}(x) - \alpha_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in K_i \cup U_i \\ \in [-1,1] & \text{Si } x \in U_i \setminus K_i \end{cases}$$

Donc $\int_\Omega |\mathbb{1}_{A_i}(x) - \alpha_i(x)|^p d\mu(x) \leq 2\mu(U_i \setminus K_i) \leq 2\dfrac{\epsilon}{n_0 \|\lambda_i\|_E^p}$ donc $\|g-h\|_p \leq (2\epsilon)^{\frac{1}{p}}$

$\Longrightarrow \|f-h\|_p \leq \epsilon + (2\epsilon)^{\frac{1}{p}}$

$\diamondsuit$

VI.3 Produit de convolution

Définition 54 :

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la tribu Borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit E un espace de Banach.
$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)d\mu(x)$

Théorème 24 :

Soient $p \geq 1$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E)$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, E)$. Alors $p\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(f*g)(x)$ existe et $f*g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, E)$
i.e. $\exists h \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, E)$: $p\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(f*g)(x) = h(x)$.
De plus, $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

Démonstration : $\boxed{p = 1}$

Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|f(x)g(y-x)\|_E \end{array}$ $\quad F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, E)$

En effet, $\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)d\mu(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E \|g(y-x)\|_E d\mu(y) = \|f(x)\|_E \|g_x\|_1$
avec $g_x(y) = g(y-x)$. Or μ invariante par translation, donc $\|g_x\|_1 = \|g\|_1$.
Comme $\|g\|_1 < \infty$ et $\|f\|_E \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on a d'après le théorème de Tonelli que $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$.
Enfin, d'après le théorème de Fubini, $(y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)d\mu(x)) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Donc $\|f*g(x)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)d\mu(x)\|_E d\mu(y) \leq \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \underbrace{\|f(x)g(y-x)\|_E}_{=F(x,y)} d\mu \otimes \mu(x,y) < \infty$

$\boxed{p > 1}$

Soit q l'exposant conjugué de p.
On pose $\alpha(x,y) = \|f(x)\|_E^{\frac{1}{p}} \|g(y-x)\|_E$ et $\beta(x,y) = \|f(x)\|_E^{\frac{1}{q}}$
Pour y fixé, $\alpha(x,y)^p = \underbrace{\|f(x)\|_E}_{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \underbrace{\|g(y-x)\|_E^p}_{\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$

Donc $\alpha(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\beta(\cdot, y) \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

D'après Hölder, pour y fixé,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x,y)\beta(x,y)d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \|g(y-x)\|_E d\mu(x) \\ &\leq \|\alpha(\cdot,y)\|_p \|\beta(\cdot,y)\|_q \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E \|g(y-x)\|_E^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

On pose $\tilde{F}(x,y) = \|f(x)\|_E \|g(y-x)\|_E^p$

Alors comme pour F, d'après Tonelli et Fubini, $\tilde{F} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ et $\|\tilde{F}\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p$

Donc finalement, $\|f * g(y)\|_E^p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x,y)\beta(x,y)d\mu(x)\right)^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{F}(x,y)d\mu(x)$

Donc $\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1^{1+\frac{p}{q}} \|g\|_p^p = \|f\|_1^p \|g\|_p^p$

$\diamondsuit$

VI.4 Approximation par des fonctions lisses

Définition 55 :

Soit E un espace de Banach et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$. $e_i = \delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

$\forall 1 \leq i \leq n$, *on note* $\partial_i f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+te_i) - f(x))$ *si elle existe, et* $\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f(x)$.

$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, E) = \{f : \mathbb{R}^n \to E : \partial^\alpha f(x)$ *existe et est continue* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq k\}$

Définition 56 :

On appelle fonctions lisses les éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, E) = \{f : \mathbb{R}^n \to E : \quad \partial^\alpha f$ *continue* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ *et fonctions lisses à support compact ceux de* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, E) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, E) \cap \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$.

Rappel (Théorème de Schwarz):

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, E) \Longrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.

Théorème 25 :

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E)$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Alors $f * \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(\cdot - x)d\mu(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, E)$ *et* $\partial^\alpha(f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

Remarque :

$f(x)\varphi(y-x)$ est le produit d'un scalaire avec un élément de E.

Démonstration : i) $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ donc $f\varphi(y - \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

ii) $f(x)\varphi(\cdot - x)$ est différentiable et $\partial_i \varphi(\cdot - x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, E) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

iii) Soit $h(x) = \|f(x) \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \partial_i \varphi(y-x)\|_E$. Le sup existe car $\partial\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

$h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x)\partial_i\varphi(y-x)\|_E \leq h(x)$.

Donc d'après le théorème de différentiation sous le signe intégrale, $\partial^\alpha(f * \varphi)$ est différentiable et continue sur $\mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

De plus,
$$\begin{aligned}\Big(\partial_i(f*\varphi)\Big)(y) &= \partial_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(y-x)d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_i\Big(\varphi(y-x)\Big)d\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_i\varphi(y-x)d\mu(x) \qquad \text{car } \partial_i \text{ est invariante par translation}\\ &= \Big(f*\partial_i\varphi\Big)(y)\end{aligned}$$

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \partial^\alpha(f*\varphi) = f*\partial^\alpha\varphi$.

$\diamondsuit$

VII Opérateurs compacts et opérateurs de Fredholm

VII.1 Opérateurs compacts

Définition 57 :

Les applications linéaires entre deux espaces normés sont aussi appelés opérateurs.

Les applications linéaires continues sont apellées opérateurs bornés. On ne parlera que d'opérateurs bornés dans ce cours.

Définition 58 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Un opérateur $u : E \longrightarrow F$ est compact $\iff \forall A \subset E$ *borné,* $u(A)$ *est relativement compact.*

$\iff \overline{u(\overline{B}_E(0,1))}$ *est compact.*

Proposition 20 :

Un opérateur compact est borné (continu).

Démonstration :

Si $\overline{u(\overline{B}_E(0,1))}$ est compact, alors il est borné $\Longrightarrow \exists a > 0 : \quad u(\overline{B}_E(0,1)) \subset \overline{B}_F(0,a)$

$\Longrightarrow \|u\| \leq a \Longrightarrow u$ borné (continu).

$\diamondsuit$

Remarque :

Si E et F sont des espaces vectoriels normés alors la compacité est équivalente à la compacité séquentielle.

Donc $u : E \longrightarrow F$ compact $\iff \forall (x_n)_n \subset E$ bornée, $(u(x_n))_n$ admet une sous-suite de Cauchy (dont la limite serait dans la complétion de F).

Proposition 21 :

Si E est de dimension finie alors tout opérateur $u : E \longrightarrow F$ est compact.

Démonstration :

$\dim E < \infty \Longrightarrow \dim u(E) < \infty$. Comme u est continu $\exists a > 0$ tel que $u(\overline{B}_E(0,1)) \subset \overline{B}_{u(E)}(0,a)$. Or $\overline{B}_{u(E)}(0,a)$ est un fermé dans $\overline{B}_F(0,a)$, qui est compact car $\dim u(E) < \infty$.

Donc u est compact.

$\diamondsuit$

Exemple :

$id : E \longrightarrow E$ est compact $\iff \overline{id(\overline{B}(0,1))} = \overline{B}(0,1)$ compact $\iff \dim E < \infty$

Proposition 22 (Démonstration laissée en exercice):

Si F est de dimension finie alors tout opérateur $u : E \longrightarrow F$ est compact.

Corollaire 19 :

*Si $u : E \longrightarrow F$ est de rang fini (*i.e. $\dim u(E) < \infty$*), alors u est compact.*

Exemple :

Soient $a < b, c < d \in \mathbb{R}$ et $K : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathcal{C}([c,d],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & \left(x \longmapsto \displaystyle\int_c^d K(x,y)f(y)dy\right) \end{array}$$ est compact (vu en TD, Ascoli).

Définition 59 :

On note $\mathcal{K}(E,F) = \{u : E \longrightarrow F$ compact $\}$.

Théorème 26 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose F complet.

Alors $\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Démonstration :

Soient $u, v \in \mathcal{K}(E,F), c \in \mathbb{C}$ et $B \subset E$ borné. $\overline{(u+cv)(B)} = \overline{u(B)+cv(B)} \subset \overline{u(B)} + \overline{cv(B)}$ compact.

Donc $u + cv$ est compact.

Soit $u \in \overline{\mathcal{K}(E,F)}$ et $B \subset E$ borné. Soit $r > 0$. $\exists v \in \mathcal{K}(E,F) : \quad \|u - v\| < \frac{r}{2}$

v compact $\Longrightarrow v(B)$ pré-compact.

Donc $\forall r' > 0$, il existe un recouvrement fini de $v(B)$ par des boules de rayon r'.

$\exists (y_i)_{1 \le i \le n}$ telle que $v(B) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^n B(y_i, \frac{r}{2})$. Donc $u(B) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^n B(y_i, r)$

Donc $u(B)$ est pré-compact donc relativement compact. Donc u est compact.

$\Longrightarrow \mathcal{K}(E,F)$ est fermé.

♢

Rappel :

E Banach $\Longrightarrow \mathcal{L}(E)$ algèbre de Banach.

Théorème 27 :

Soient E, F, G des espaces vectoriels normés et $u \in \mathcal{L}(E,F), v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

i) Si $u \in \mathcal{K}(E,F)$ alors $v \circ u \in \mathcal{K}(E,G)$

ii) Si $v \in \mathcal{K}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{K}(E,G)$

En particulier, si $E = F = G$ et E complet, alors $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$ est un idéal fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Rappel :

Soit I sous-espace vectoriel d'une algèbre A.

I est un idéal (bilatère) $\Longleftrightarrow \forall x \in I, a \in A, \quad xa \in I, ax \in I$.

Démonstration : i) $\overline{v \circ u(B)} = v(\overline{u(B)})$ compact car $\overline{u(B)}$ compact et v continue.

ii) u continue donc $u(B)$ borné $\forall B$ borné.

v compact donc $v(u(B))$ relativement compact.

Si $E = F = G$ alors $v \circ u$ est un produit dans $\mathcal{L}(E)$

donc $i)$ et $ii) \Longleftrightarrow \mathcal{K}(E)$ est un idéal.

E complet $\Longrightarrow \mathcal{K}(E)$ fermé.

♢

VII.2 Opérateurs de Fredholm

Rappel :

Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E.

Alors $E \diagup_F$ est un espace vectoriel normé pour $\|x \mod F\| = \inf_{y \in F} \|x+y\|_E$

Définition 60 :

Soient E, F *deux espaces vectoriels normés et* $T : E \longrightarrow F$ *un opérateur borné.*

On note $\operatorname{Coker} T = F \diagup_{\operatorname{Im} T}$ *le co-noyau de* T.

Remarque :

T borné $\Longrightarrow \operatorname{Ker} T$ fermé, mais $\operatorname{Im} T$ n'est pas toujours fermé.

Le co-noyau $\operatorname{Coker} T$ existe même s'il n'est ainsi pas forcément un espace vectoriel normé.

Définition 61 :

Soient E, F *deux espaces vectoriels normés et* $T : E \longrightarrow F$ *un opérateur borné.*

T *est un opérateur de Fredholm* $\Longleftrightarrow$ *i)* $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$

ii) $\operatorname{Im} T$ *est fermé et* $\dim \operatorname{Coker} T < \infty$

Lemme :

Soit F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach* E.

Si *i)* $\dim F < \infty$ *ou* *ii)* $\dim(E \diagup_F) < \infty$

alors F *admet un espace complémentaire fermé.*

Démonstration : i) Supposons $\dim F < \infty$. Soit $(f_i)_{1 \le i \le n}$ une base de F.

Soit $(f^i)_{1 \le i \le n}$ sa base duale (base de F^*). $f^i(f_j) = \delta^i_j$.

D'après Hahn-Banach, on peut prolonger f^i en une application linéaire continue $\tilde{f}^i$ sur E.

Donc $\tilde{f}^i \in E^*$ et $\tilde{f}^i{}_{|F} = f^i$

Soit $G = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{Ker} \tilde{f}^i}_{\text{fermé}} \subset E \Longrightarrow G$ fermé.

$G \cap F = \{x \in F : \forall 1 \le i \le n, \quad \tilde{f}^i(x) = f^i(x)\} = \{0\}$

donc $E = G + F$ et $G \cap F = \{0\}$.

ii) Supposons $\dim(E \diagup_F) < \infty$. Soit $(y_i)_{1 \le i \le n}$ une base de $E \diagup_F$ et $(e_i)_{1 \le i \le n} \subset E$ telle que $\forall 1 \le i \le n, \quad e_i \mod F = y_i$.

On pose $G = Vect\{(e_i)_{1 \le i \le n}\}$ sous-espace fermé de E. Soit $x \in G \cap F$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$.

Or $x \mod F = 0 \mod F$ donc $\forall 1 \le i \le n, \quad a_i = 0$.

De plus, $G + F = \{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i + f : \quad a_i \in \mathbb{C}, f \in F\} = E$ car

$$\begin{aligned} G + F \diagup_F &= \{\sum_{i=1}^{n} a_i (e_i \mod F) : \quad a_i \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i : \quad a_i \in \mathbb{C}\} \\ &= E \diagup_F \end{aligned}$$

Donc G est un espace complémentaire fermé de F.

$\diamondsuit$

Corollaire 20 :

Soit F *un espace de Banach,* E *un espace vectoriel normé et* $T : E \longrightarrow F$ *un opérateur borné tel que* $\dim \operatorname{Coker} T < \infty$.

Alors $\operatorname{Im} T$ *est fermé.*

Démonstration :

Soit $G = Vect\{(f_i)_{1\leq i\leq n} : f_i \in F\}$ avec $(f_i \mod (\operatorname{Im} T))_{1\leq i\leq n}$ une base de $\operatorname{Coker} T = F/_{\operatorname{Im} T}$.

G est un espace complémentaire de $\operatorname{Im} T$ (*i.e.* $F = G + \operatorname{Im} T$ et $G \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$).

- Supposons T injective.

  $$\begin{array}{ccccc} E \overset{T}{\hookrightarrow} & F & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & F/_G \\ & y & \longmapsto & y \mod G \end{array}$$

  $\pi \circ T$ est injective, surjective et continue.

  Donc d'après le théor''eme de l'application ouverte, $(\pi \circ T)^{-1}$ est continue.

  $F/_G \xrightarrow{(\pi\circ T)^{-1}} E \overset{T}{\hookrightarrow} \operatorname{Im} T \qquad T \circ (\pi \circ T)^{-1}$ est bijective et continue, donc un isomorphisme

  G fermé dans F Banach $\Longrightarrow F/_G$ Banach, donc $T \circ (\pi \circ T)^{-1}(F/_G)$ est complet donc fermé.
- Si T n'est pas injective, on prend $\tilde{T} : E/_{\operatorname{Ker} T} \hookrightarrow F$, avec $\operatorname{Coker} \tilde{T} = \operatorname{Coker} T$ et $\operatorname{Im} \tilde{T} = \operatorname{Im} T$.

$\diamondsuit$

Exemples : i) $E = F = \ell^2(\mathbb{Z}, \mu) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\}$ avec μ la mesure de comptage.

Soit $T : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (a_n)_n & \longmapsto & (a_{n+1})_n \end{array}$ l'opérateur de décalage $\begin{array}{ccccccc} \cdots & a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & \downarrow T & & & \\ \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \end{array}$

$\operatorname{Ker} T = \{0\}$, $\operatorname{Im} T = \ell^2(\mathbb{Z})$ donc $\operatorname{Coker} T = \{0\}$, d'où T est un opérateur de Fredholm.

ii) $E = F = \ell^2(\mathbb{N}) = \{a \in \ell(\mathbb{Z}) : \quad \forall k < 0, \quad a_k = 0\}$

$$T : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (a_n)_n & \longmapsto & (a_{n+1})_n \end{array}$$

Alors $\operatorname{Ker} T = \{(a_0, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})\} \simeq \mathbb{C}$

$\operatorname{Im} T = \ell^2(\mathbb{N}) \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 1$ et $\dim \operatorname{Coker} T = 0$

T est un opérateur de Fredholm.

iii) Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire $< (a_n)_n, (b_n)_n >= \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T(b_n)$ et $(\delta_n)_n$ la base canonique orthonormée.

Alors $< \delta_n, T^\dagger(\delta_n) >=< T(\delta_n), \delta_n >\Longrightarrow T^\dagger$ décale vers la droite.

$$T^\dagger : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ (a_n)_n & \longmapsto & \begin{cases} (a_{n-1})_n & \text{Si } n > 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \end{array}$$

$\operatorname{Ker} T^\dagger = \{0\}$, $\operatorname{Coker} T^\dagger = \ell^2(\mathbb{N})/_{\{\lambda\delta_n : \lambda\in\mathbb{N}\}}$

$\dim \operatorname{Coker} T^\dagger = 1$ donc $T^\dagger$ est un opérateur de Fredholm.

Lemme :

Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E. Soit $\epsilon > 0$.
Alors $\exists x \in E \setminus F$ tel que $\|x\| = 1$ et $dist(x, F) \geq 1 - \epsilon$.

Démonstration :

Soit $z \in E \setminus F$. $\exists y_0 \in F : \quad dist(z, y_0) \leq (1+\epsilon) dist(z, F)$

Car $dist(z, F) = \inf_{y \in F} \|z - y\| > 0$ car F fermé.

On pose $x = \dfrac{z - y_0}{\|z - y_0\|}$ donc $\|x\| = 1$

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\| = \frac{\Big\| z - \overbrace{y_0 - \|z - y_0\| y_0}^{\in F} \Big\|}{\|z - y_0\|} \geq \frac{\inf_{y' \in F} \|x - y'\|}{(1+\epsilon) dist(x, F)} = \frac{1}{1+\epsilon} \geq 1 - \epsilon$$

♢

Théorème 28 :

Soit E un espace de Banach et $u : E \longrightarrow E$ un opérateur compact.
Alors $Id - u$ est un opérateur de Fredholm.

Démonstration : • $x \in \mathrm{Ker}(Id - u) \Longleftrightarrow x = u(x)$

Donc $u_{|\mathrm{Ker}(Id-u)} = Id_{|\mathrm{Ker}(Id-u)}$

Soit $B = \overline{B}(0,1) \subset \mathrm{Ker}(Id - u)$. Alors $B = Id(B) = u(B)$.

Or u compact donc $\overline{u(B)} = \overline{B} = B$ compact. Mais $\mathrm{Ker}(Id - u)$ est un espace de Banach.

Donc d'après le théorème de Riesz, $\dim[\mathrm{Ker}(Id - u)] < \infty$

- Supposons pas l'absurde que $E \diagup_{\mathrm{Im}(Id-u)} = \mathrm{Coker}(Id - u)$ n'est pas de dimension finie.

  Alors $\exists (H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite de sous-espaces vectoriels tels que $(Id - u)(E) = H_0 \subset H_1 \subset \cdots$ et tels que $H_n \subset H_{n+1}$ et $H_{n+1} \diagup_{H_n} \simeq \mathbb{C}$

  Car $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists z_n \notin H_n$ et $H_{n+1} := Vect\{H_n, z_n\}$

  Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme précédent appliqué à $E = H_{n+1}$ et $F = H_n$, $\exists x_{n+1} \in H_{n+1}$ tel que $dist(x_{n+1}, H_n) \geq 1 - \epsilon$. $\quad \forall k \leq n$:

  $$\|u(x_{n+1} - u(x_k)\| = \|\underbrace{\underbrace{x_{n+1}}_{\in H_n} - \underbrace{(Id-u)(x_{n+1})}_{\in H_0} - [\underbrace{x_k}_{\in H_n} - \underbrace{(Id-u)(x_k)}_{\in H_0}]}_{\in H_n}\| \geq dist(x_{n+1}, H_n) \geq 1 - \epsilon$$

  Donc $(u(x_n))_n$ n'admet pas de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de u.

♢

Définition 62 :

$Fred(E, F) = \{T \in \mathcal{L}(E, F) : \quad T$ *opérateur de Fredholm* $\}$

Définition 63 :

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T \in Fred(E, F)$.
$\mathrm{Ind}\, T = \dim \mathrm{Ker}\, T - \dim \mathrm{Coker}\, T \in \mathbb{Z}$ *est l'indice de T.*

Théorème 29 (Alternative de Fredholm):

Si $T \in Fred(E, F)$ et $\mathrm{Ind}\, T = 0$, alors :

i) Ou bien $T(x) = y$ admet une unique solution $\forall y \in F$ (et alors T est injective),

ii) Ou alors tous les $y \in F$ ne vérifient pas $T(x) = y$, et si il existe un $y \in F$ qui vérifie cette équation, alors l'espace des solutions est un espace affine de dimension finie.

Démonstration : (i) Ou bien T est surjectif et dans ce cas $\operatorname{Coker} T = \{0\}$ donc $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, d'où T injectif.

(ii) Ou alors T n'est pas surjectif, donc $\dim \operatorname{Coker} T > 0$ donc $\dim \operatorname{Ker} T > 0$ mais finie. De plus si $T(x) = y$ admet une solution x_0, alors $x_0 + z$ est aussi solution $\forall z \in \operatorname{Ker} T$.

$\diamondsuit$

L'alternative de Fredholm était historiquement formuler dans le context $T = Id + u$ avec $u \in \mathcal{K}(E, F)$ de même type que dans l'exemple trois.

Définition 64 :
Soient E, F deux espaces vectoriels normés.
$\mathcal{GL}(E, F) = \{f \in \mathcal{L}(E, F) : f$ *bijective et bicontinue*$\}$.

Remarque :
Si E et F sont des espaces de Banach, alors bijective $\Longrightarrow$ bicontinue.

Lemme :
Soient E, F deux espaces de Banach. $\mathcal{GL}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ est ouvert.

Démonstration :
Soit $T \in \mathcal{GL}(E, F)$. Soit $S \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\|T - S\| < \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$.

On a $S = T[Id - T^{-1}(T - S)]$. La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [T^{-1}(T - S)]^n$ est absolument convergente donc convergente.

En effet, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|T^{-1}(T - S)\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\|T^{-1}\| \cdot \|T - S\|}_{<1} \Big)^n < \infty$

Donc $\mathcal{U} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [T^{-1}(T - S)]^n \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow S\mathcal{U} &= T[Id - T^{-1}(T - S)] \sum_{n=0}^{\infty} [T^{-1}(T - S)]^n \\
&= T \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \Big([T^{-1}(T - S)]^n - [T^{-1}(T - S)]^{n+1} \Big) \\
&= T \lim_{N\to\infty} \Big(Id - [T^{-1}(T - S)]^{N+1} \Big) \\
&= T \qquad\qquad\qquad\qquad \text{car } \|T^{-1}(T - S)\|^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Donc $S\mathcal{U}T^{-1} = Id$. De la même manière, $\mathcal{U}T^{-1}S = Id$.
Donc S est bijective donc bicontinue, donc $S \in \mathcal{GL}(E, F)$.

$\diamondsuit$

Remarque : • $\mathcal{GL}(E) = \mathcal{GL}(E,E)$ est un groupe pour la composition.

- Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach, d'élément neutre 1.
  Alors on peut définir $\mathcal{GB} = \{x \in \mathcal{B} : \quad \exists y \in \mathcal{B} : \quad xy = 1 \text{ et } yx = 1\}$ et de la même manière, $\mathcal{GB}$ est ouvert dans $\mathcal{B}$ (On n'a besoin pour montrer cela que de $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$).

Corollaire 21 :

Soient E, F deux espaces de Banach. Alors $Fred(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$ est ouvert.

Démonstration :

Soit $T \in Fred(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé complémentaire de $\operatorname{Ker} T$ dans E (*i.e.* $E = V + \operatorname{Ker} T$ avec $V \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$).

Soit W un sous-espace vectoriel fermé complémentaire de $\operatorname{Im} T$ dans F ($\dim W < \infty$).

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(V \times W, F) \\ & S & \longmapsto & \tilde{S} \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rccc} \tilde{S} : & V \times W & \longrightarrow & F \\ & (v,w) & \longmapsto & S(v) + w \end{array}$$

$\tilde{S}$ est linéaire continue et Ψ est continue : $\|\Psi(S_1) - \Psi(S_2)\| = \sup\limits_{\substack{(v,w) \in V \times W \\ (v,w) \neq (0,0)}} \dfrac{\|S_1(v) - S_2(v)\|_F}{\|(v,w)\|_{V \times W}} \leq \|S_1 - S_2\|$

$\Psi(T)(v,w) = T(v) + w$

Donc premièrement $(v,w) \in \operatorname{Ker} \Psi(T) \iff v \in \operatorname{Ker} T$ et $w = 0$

$\iff v = 0$ et $w = 0$

Donc $\Psi(T)$ est injective ;

et deuxièmement $\Psi(T)(E) = \operatorname{Im} T + W = F$

$\Longrightarrow \Psi(T)$ est surjective.

Donc $\Psi(T) \in \mathcal{GL}(V \times W, F)$

D'après le lemme, $\exists \tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{L}(V \times W, F)$ ouvert tel que $\Psi(T) \in \tilde{\mathcal{U}}$ et $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{GL}(V \times W, F)$

Alors $U = \Psi^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{L}(E,F)$ ouvert et $T \in U$.

Montrons que $U \subset Fred(E,F)$: Soit $S \in U$.

i) $\operatorname{Ker} S_{|V} = \operatorname{Ker} \Psi(S)_{|V \times \{0\}} = \{0\}$ car $\Psi(S)$ bijective.
Donc $kerS \subset V'$ espace complémentaire de V et en particulier, $\dim \operatorname{Ker} S \leq \dim \operatorname{Ker} T$ (car V complémentaire à $\operatorname{Ker} T$).

ii) $$\begin{aligned} F/_{S(V)} = F/_{\Psi(S)(V)} &\simeq F/_{\Psi(T)(V)} \quad \text{car } \Psi(S), \Psi(T) \text{ bijectives.} \\ &\simeq W \end{aligned}$$
En particulier, $\dim \operatorname{Coker} S = \dim F/_{S(E)} \leq \dim W = \dim \operatorname{Coker} T$
Donc S est un opérateur de Fredholm.

$\diamondsuit$

Remarque :

Dans un voisinage assez petit d'un opérateur de Fredholm, il existe des opérateurs de Fredholm dont les dimensions du noyau et du conoyau sont inférieures à celles de l'opérateur initial.

Théorème 30 :

Soient E, F *deux espaces de Banach. Alors* $\mathrm{Ind} : Fred(E,F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est continue.*
En particulier, Ind *est localement constante.*

Démonstration :

Il existe un sous-espace vectoriel Z fermé dans E tel que $\mathrm{Ker}\, S + V + Z = E$ et $(\mathrm{Ker}\, S + V) \cap Z = \{0\}$.
En effet, Z est de dimension finie, donc $\dim \mathrm{Ker}\, T = \dim \mathrm{Ker}\, S + \dim Z$

$S(E)\big/_{S(V)} = S(V+Z)\big/_{S(V)} \simeq S(Z) \simeq Z$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \dim \mathrm{Coker}\, S = \dim F\big/_{S(E)} &= \dim F\big/_{S(V)} - \dim S(E)\big/_{S(V)} \\
&= \dim W - \dim Z \qquad\qquad \text{car } F\big/_{S(V)} \simeq W \\
&= \dim \mathrm{Coker}\, T - \dim Z
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ind}\, S = \mathrm{Ind}\, T$.

♢

Corollaire 22 :

Soit E *un espace de Banach et* $u \in \mathcal{K}(E)$.
Alors $\mathrm{Ind}(Id - u) = 0$.

Démonstration :

$$\begin{array}{rccl} T: & [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & t & \longmapsto & Id - tu \end{array} \quad \text{est continue}$$

Car $\|T(t) - T(s)\| = |t-s| \cdot \|u\|$
Donc $\mathrm{Ind} \circ T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ est continue.
Comme $[0,1]$ est connexe, $\mathrm{Ind} \circ T$ est constante.
Donc $\mathrm{Ind}(Id - u) = \mathrm{Ind}(Id - 0) = 0$ (car Id est bijective).

♢

Exemples :

- L'opérateur de décalage sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ est d'indice 0 car bijectif.
- L'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est d'indice 1.
- Son dual (décalage à droite) est d'indice -1.

Théorème 31 :

Soient E, F *deux espaces de Banach.*
$T \in Fred(E,F) \Longleftrightarrow \exists S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F,E)$ *tels que* $S_1 T - Id \in \mathcal{K}(E)$ *et* $TS_2 - Id \in \mathcal{K}(F)$ *(c-à-d.* F *inversible à gauche et à droite modulo un opérateur compact).*

Démonstration :

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supposons $\exists S_1, S_2 \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $S_1 T - Id \in \mathcal{K}(E)$ et $TS_2 - Id \in \mathcal{K}(F)$.
$\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Ker}(S_1 T)$. Or le noyau d'un opérateur $Id + u$ compact est de dimension finie.

Donc $S_1 T = Id + u$ avec $u = S_1 T - Id \in \mathcal{K}(E)$ et $\dim \operatorname{Ker} u < \infty$.

$\operatorname{Im}(TS_2) \subset \operatorname{Im} T$ donc $F/_{\operatorname{Im} T} \subset F/_{\operatorname{Im}(TS_2)}$ de dimension finie car $TS_2 = Id + v, \quad v \in \mathcal{K}(F)$.

Donc $T \in Fred(E, F)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $T \in Fred(E, F)$.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé complémentaire à $\operatorname{Ker} T$ dans E, et W un sous-espace vectoriel fermé complémentaire à $\operatorname{Im} T$ dans F.

$T_{|V} : V \longrightarrow \operatorname{Im} T$ bijective donc bicontinue.

On pose $S : \begin{array}{ccc} F = W + \operatorname{Im} T & \longrightarrow & E \\ w + y & \longmapsto & T_{|V}^{-1}(y) \end{array}$

$S \in \mathcal{L}(F, E)$ et $(Id - ST)(\underbrace{v}_{\in V} + \underbrace{x}_{\in \operatorname{Ker} T}) = v + x - ST(v) = v + x - v = x$

Donc $Id - ST$ est de rang fini donc compact.

$(Id - TS)(\underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{y}_{\in \operatorname{Im} T}) = w + y - TS(w + y) = w + y - TS(y) = w \in W$ de dimension finie.

Donc $Id - TS$ est de rang fini donc compact. $(S_1 = S_2 = S)$

$\diamondsuit$