Licence de Mathématiques L3 **Fiche de TD N° 0**
Calcul intégral

On considère dans cette fiche la notion d'intégrabilité au sens de Riemann.

Exercice 1 Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et intégrables sur $[a,b]$

1. Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$
2. Si la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g, alors g est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = \int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x))dx = \sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)dx.$

Exercice 2 Soit f et g deux fonctions définies sur $[0,1]$ par : $f(x)=1$ si $x=0$ et $f(x)=0$ sinon, $g(x)=1/q$ si $x=p/q$ avec p et q entiers non nuls et premiers entre eux et $g(x)=0$ sinon.

1. Montrer que f et g sont intégrables. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$
2. Montrer que $f\circ g$ n'est pas intégrable.

Exercice 3

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^n E(x)dx$
2. Soit $x\in[0,1]$ et, pour tout $n\geq 1$, soit $a_n=a_n(x)$ sa $n^{ième}$décimale. On note $f(x)$ le réel de $[0,1]$ dont la n^{ime} décimale b_n est définie par $b_{2n}=a_{2n-1}$ et $b_{2n-1}=a_{2n}$. Montrer que f est intégrable sur $[0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

Exercice 4 Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $\mid a\mid\neq 1$.
A l'aide des sommes de Riemann, calculer $\displaystyle I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)dx.$

Exercice 5 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tout $n\geq 1$, on note
$\displaystyle\Delta_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\ \Delta_n$.

Exercice 6 Calculer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = n-\sum_{k=0}^{n-1}\cos(1/\sqrt{n+k})$, $n\geq 1$.
2. $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$, $n\geq 1$.

Exercice 7 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction convexe et $c=(a+b)/2$.

1. Montrer que, pour tout $x\in[a,b]$, $f(c)+(x-c)f'_d(c)\leq f(x)\leq f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
2. Montrer que $\displaystyle(b-a)f(\frac{a+b}{2})\leq\int_a^b f(x)dx\leq\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$.

Feuille d'exercices numéro 1
Tribus.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) Soit E un ensemble. Alors $A \subset E \iff A \in \mathscr{P}(E)$.
(2) Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Alors $E \in \mathscr{T}$.
(3) $\mathscr{T}$ est une tribu sur E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :
- $\emptyset \in \mathscr{T}$.
- $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A^c \in \mathscr{T}$.
- $(\forall n \in \mathbf{N}, A_n \in \mathscr{T}) \Rightarrow \bigcap A_n \in \mathscr{T}$.

(4) Si E est dénombrable et $\mathscr{T}$ est une tribu sur E, alors $\mathscr{T}$ est dénombrable.
(5) La tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par les fermés de $\mathbf{R}$.
(6) Un borélien est soit un ouvert, soit son complémentaire (c'est-à-dire un fermé).

Exercice 2 Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu.

Exercice 3 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et A, B des éléments de $\mathscr{T}$. Montrer que $A \cap B \in \mathscr{T}$ et $A \Delta B \in \mathscr{T}$.

Exercice 4 Les classes suivantes sont-elles des tribus ?
(a) $\mathcal{F}_1 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est finie $\}$.
(b) $\mathcal{F}_2 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est finie ou A^c est finie $\}$.
(c) $\mathcal{F}_3 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ t.q. A est au plus dénombrable ou A^c est au plus dénombrable $\}$.

Exercice 5 Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Déterminer la tribu engendrée $\sigma(\mathscr{A})$ dans les cas suivants :
(a) $\mathscr{A} = \{A\}$, où A est une partie fixe de X.
(b) $\mathscr{A} = \{\{x\}, x \in X\}$. On séparara le cas où X est fini ou dénombrable et le cas où X n'est pas au plus dénombrable.
(c) $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{P}(X)$ t.q. $A_0 \subset A\}$, où A_0 est une partie fixe de X.

Exercice 6 Combien y a-t-il de tribus différentes sur un ensemble à 3 éléments ? Sur un ensemble à 4 éléments ?

Exercice 7 Montrer que si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux classes de parties de X telles que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\sigma(\mathscr{A}) \subset \sigma(\mathscr{B})$. Montrer ensuite que $\sigma(\sigma(\mathscr{A})) = \sigma(\mathscr{A})$.

Exercice 8 Soit $f : X \to Y$ une fonction entre deux ensembles.
(a) Soit $\mathscr{B}$ une tribu sur Y. Monter que l'ensemble $f^{-1}[\mathscr{B}] := \{f^{-1}(B), B \in \mathscr{B}\}$ est une tribu sur X. Montrer que si $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{E})$ alors $f^{-1}[\mathscr{B}] = \sigma(\{f^{-1}(B), B \in \mathscr{E}\})$.
(b) Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur X. Donner un exemple montrant que $\{f(A), A \in \mathscr{A}\}$ n'est pas nécessairement une tribu sur Y. Montrer qu'en revanche $\{B \in \mathscr{P}(Y)$ t.q. $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$ est une tribu sur Y.

Exercice 9 Tribu engendrée par une partition. Soit $\pi = \{A_i\}_{i \in I}$ une partition de X. Déterminer $\sigma(\pi)$:
(a) Lorsque I est au plus dénombrable.
(b) Lorsque I n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 10 (Partiel avril 2007) On rappelle que la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est la tribu engendrée par la famille des intervalles ouverts $]a, b[$, $a < b$. En déduire que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est aussi la tribu engendrée par la famille $\mathscr{C}$ suivante :

$$\mathscr{C} = \{] - \infty, t], t \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 11 La tribu borélienne de R. On munit $\mathbf{R}$ de la métrique usuelle et on note $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ la tribu borélienne de $\mathbf{R}$.
(1) Montrer que tout ouvert, tout fermé et tout intervalle de $\mathbf{R}$ sont des boréliens.
(2) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ est engendrée par une classe dénombrable.

(3) Montrer que $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ n'est pas engendrée par une partition de $\mathbf{R}$.
(4) Soit $a \in \mathbf{R}$ et $\mathcal{F}_a = \{B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \text{ t.q. } B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}\}$. Montrer que $\mathcal{F}_a$ est une tribu. En déduire que $\forall B \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}, B + a \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On dit que la tribu borélienne est invariante par translation.
(5) Soit $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}} = \{B \in \mathscr{B}_R \text{ t.q. } B = -B\}$. Montrer que $\mathscr{B}^s_{\mathbf{R}}$ est une tribu, que l'on appelle tribu des boréliens symétriques.

Exercice 12 On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}$.
(1) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}_n = \{[\![0, n]\!], \{n+1\}, \{n+2\}, \cdots\}$ et $\mathscr{T}_n = \sigma(\mathscr{A}_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}_n)$ est une suite décroissante. On note ensuite $\mathscr{T} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}_n$. Montrer que $\mathscr{T} = \{\emptyset, \mathbf{N}\}$.
(2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{A}'_n = \{\{0\}, \{1\}, \cdots, \{n-1\}, [\![n, +\infty[\!]\}$ et $\mathscr{T}'_n = \sigma(\mathscr{A}'_n)$. Montrer que la suite $(\mathscr{T}'_n)$ est croissante. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{T}'_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 13 (*) On travaille sur l'ensemble $X = \mathbf{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $n\mathbf{N}^*$ l'ensemble des multiples non nuls de n. Soit les classes $\mathscr{A} = \{n\mathbf{N}^*, n \geqslant 1\}$ et $\mathscr{A}' = \{p\mathbf{N}^*, p \geqslant 1, p \text{ premier}\}$. Montrer que $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(X)$, mais que $\sigma(\mathscr{A}') \neq \mathscr{P}(X)$.

Exercice 14 Soit X un ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une classe de parties de X. Montrer que pour chaque ensemble $C \in \sigma(\mathscr{A})$, il existe une sous-classe au plus dénombrable $\mathscr{A}_C \subset \mathscr{A}$ telle que $C \in \sigma(\mathscr{A}_C)$.

Exercice 15 Soient X et Y deux ensembles au plus dénombrables. Montrer que le produit des tribus complètes est la tribu complète du prosuit cartésien, c'est-à-dire que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.

Feuille d'exercices numéro 2
Mesures

Sauf mention contraire, μ dénote une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
(2) Si (A_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
(3) Une réunion de parties de mesure nulle est de mesure nulle.
(4) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.
(5) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
(6) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A), A \text{ parcourant } \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
(7) La mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ est σ-finie.

Exercice 2 Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles (A_n) telle que $\mu(A_n) \not\to \mu(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n)$.

Exercice 3 On rappelle que μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que $\bigcup_n A_n = X$ et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n. Montrer que si μ est σ-finie, on peut choisir les A_n deux à deux disjoints.

Exercice 4 Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable tel que la tribu $\mathscr{T}$ contient les singletons. Soit μ une mesure finie sur $(X, \mathscr{T})$. On note $D = \{x \in X \text{ t.q. } \mu(\{x\}) > 0\}$. Montrer que D est au plus dénombrable. Cela reste-t-il vrai si on ne suppose plus que la mesure est finie ? Et si on suppose que la mesure est σ-finie ?

Exercice 5
(a) Soient A et B deux parties mesurables telles que l'une d'elles soit de mesure finie. Montrer que $|\mu(A) - \mu(B)| \leqslant \mu(A \Delta B)$.
(b) Soient A et B deux parties mesurables telles que $\mu(A) + \mu(B) > \mu(X)$. Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.
(c) Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie de parties mesurables telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$. Montrer qu'il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geqslant \dfrac{\mu(X)}{n}$.

Exercice 6 (Partiel automne 2006) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par
$$\mathscr{T}' = \{A \in \mathscr{T} \text{ t.q. } \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}.$$
Montrer que $\mathscr{T}'$ est une tribu dans X.

Exercice 7 Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite *quelconque* de parties mesurables.
(a) Établir les encadrements suivants :
$(a1)$ $\sup_{n\geqslant 1} \mu(A_n) \leqslant \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.
$(a2)$ $0 \leqslant \mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$.
(b) Montrer les implications suivantes :
$(b1)$ $\forall n, \mu(A_n) = 0 \Longrightarrow \mu(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = 0$.
$(b2)$ $\mu(X) = 1$ et $\forall n, \mu(A_n) = 1 \Longrightarrow \mu(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n) = 1$.

Exercice 8 Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, tel que pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{x\}) < +\infty$. On dit que μ est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout $x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0$. On dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D au plus dénombrable tel que $\mu(D^c) = 0$.
(a) Montrer que μ est diffuse si et seulement si toute partie A au plus dénombrable est $\mu-$négligeable.

(b) Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de E et une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telles que $\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\delta_{a_n}$.
(c) On suppose maintenant que la *mesure μ est $\sigma-$finie*. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$ où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 9 Mesure image. Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{T}')$ des espaces mesurables, et $\phi : X \to Y$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. On définit $\nu : \mathscr{T}' \to [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$.
(a) Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}'$. On dit que c'est la mesure image de μ par ϕ, et on la note $\phi_*\mu$.
(b) On choisit $\mu = \delta_a$, où $a \in X$. Déterminer $\phi_*\delta_a$.
(c) On suppose que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ vérifiant $\mu(X) = 1$. On fixe $B \in \mathscr{T}$ et on choisit $(Y, \mathscr{T}') = (\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$. Déterminer $(\mathbf{1}_B)_*\mu$.

Exercice 10 Applications préservant une mesure.
On fixe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $\mu(X) < +\infty$. On dit qu'une application $f : X \to X$ préserve μ si pour tout $A \in \mathscr{T}$, $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ et $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Soit f une application qui préserve μ. On pose $f^1 = f$, et $f^{n+1} = f^n \circ f$, pour $n \geqslant 1$.
(1) Monter que f^n préserve μ pour tout $n \geqslant 1$.
(2) On fixe $A \in \mathscr{T}$. Soit $F = \{x \in A \text{ t.q. } \forall n \geqslant 1, f^n(x) \notin A\}$.
(2a) Montrer que $F \in \mathscr{T}$.
(2b) Pour $p \geqslant 1$, soit $F_p = (f^p)^{-1}(F)$. Montrer que les ensembles (F_p) sont deux à deux disjoints.
(2c) En déduire que $\mu(F) = 0$.

Exercice 11 Fonction de répartition. Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.
Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose $F(t) = \mu(]-\infty, t[)$.
(a) Montrer que F est à valeurs dans $[0, 1]$.
(b) Montrer que F est croissante.
(c) Déterminer les limites de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
(d) Montrer que F est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que F soit continue sur $\mathbf{R}$.
On suppose désormais que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(e) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $F^{-1}(\{x\})$ est un intervalle compact non vide de $\mathbf{R}$. On note cet intervalle $[s_x, t_x]$.
(f) Montrer que $t < s_x$ si et seulement si $F(t) < x$.
(g) Soit $\nu = F_*\mu$ la mesure image de μ par l'application F. Que vaut $\nu(]-\infty, x[)$ pour $x \in \mathbf{R}$?
(h) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un segment $I \subset [a, b]$, de longueur $\frac{1}{2}(b-a)$ et tel que $\mu(I) = \frac{1}{2}\mu([a, b])$.

Feuille d'exercices numéro 3
Fonctions mesurables.

Fonctions mesurables.

Sauf mention contraire, on travaille dans un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

Exercice 1 Vrai ou Faux ?
(1) L'ensemble $[2, 3[\cap \mathbf{Q}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.
(2) Une fonction $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
(3) Si $f : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_2, \mathscr{T}_2)$ est mesurable et $g : (X_2, \mathscr{T}_2) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée, alors $gof : (X_1, \mathscr{T}_1) \to (X_3, \mathscr{T}_3)$ est étagée.
(4) Si $f : (X, \mathscr{T}) \to \mathbf{R}$ vérifie que pour tout fermé $F \subset \mathbf{R}$, $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$, alors f est mesurable.
(5) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
(6) L'ensemble $A = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.q. } \cos(x) = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbf{R}$.

Exercice 2 Soit $A \subset X$. Montrer que la fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

Exercice 3 (**Examen juin 2007 2ème session**).
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est borélienne.

Exercice 4 Soit $f : X \to \mathbf{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $f(x) \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ sinon. Montrer que g est mesurable.

Exercice 5 Soit $f : X \to \mathbf{R}$. On définit pour tout $M > 0$ la fonction f_M par

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| < M \\ M \text{ si } f(x) \geqslant M \\ -M \text{ si } f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Montrer l'équivalence entre (A) et (B) :
(A) f est mesurable.
(B) $\forall M > 0, f_M$ est mesurable.

Exercice 6 Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathscr{T})$ dans $\mathbf{R}$ dans les cas suivants :
(1) $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$.
(2) $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la dérivée f' est borélienne.

Exercice 8 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est borélienne.

Exercice 9 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge}\}$ et $B = \{x \in X \text{ t.q. la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$. Montrer que A et B sont dans $\mathscr{T}$.
(b) Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit $g : X \to \mathbf{R}$ par $g(x) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ t.q. } f_n(x) \geqslant a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = 0$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 10 On note $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer que toute fonction constante appartient à $\mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$.
(b) Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T})$ mais que la réciproque est fausse.

(c) Soit $X = \mathbf{R}$ et $\mathscr{T}_s$ la tribu dans X engendrée par les singletons. Montrer que $f \in \mathcal{L}^0(X, \mathscr{T}_s)$ si et seulement si il existe un ensemble $D \subset \mathbf{R}$ au plus dénombrable tel que $f_{|D^c}$ soit constante.

Exercice 11 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). Soit f une fonction de X dans $\mathbf{R}$.
(a) Montrer qu'il existe sur X une plus petite tribu, notée $\mathscr{T}_f$ telle que $f : (X, \mathscr{T}_f) \to \mathbf{R}$ soit mesurable.
(b) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$.
(c) Décrire $\mathscr{T}_f$ dans le cas où $X = \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est la fonction "partie entière".
(d) On revient au cas général. Soit $g : X \to \mathbf{R}$ une autre fonction. Montrer que g est mesurable (pour la tribu $\mathscr{T}_f$) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable telle que $g = h \circ f$.

Exercice 12 Soit X un ensemble (on ne se donne pas de tribu sur X). On note $B(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbf{R}$. Si $f \in B(X)$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On remarquera que $B(X)$ est un espace vectoriel.

Soit E un sous-espace vectoriel de $B(X)$. On dit que E est régulier s'il vérifie
(i) $\mathbf{1}_X \in E$
(ii) Si f et g appartiennent dans E, alors $\max(f, g)$ appartient à E.
(iii) Si (f_n) est une suite d'éléments de E telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < \infty$ et qui converge simplement vers une fonction f, alors f appartient à E.

1. Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X et $BM(X, \mathscr{T})$ l'ensemble des fonctions de X dans $\mathbf{R}$ qui sont bornées et mesurables (pour $\mathscr{T}$). Montrer que $BM(X, \mathscr{T})$ est un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$.
2. Réciproquement, soit E un sous-espace vectoriel régulier de $B(X)$. On va construire une tribu $\mathscr{T}$ dans X telle que $E = BM(X, \mathscr{T})$.
   (a) Soit $\mathscr{T} = \{A \in \mathscr{P}(X) \text{ t.q. } \mathbf{1}_A \in E\}$. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu dans X.
   (b) Montrer que $BM(X, \mathscr{T}) \subset E$.
   (c) On fixe $f \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \leqslant \alpha\}$ et $g = \max(f, \alpha) - \alpha$. Montrer que $g(x) = 0 \iff x \in A$. On pose ensuite pour $n \geqslant 1$, $g_n = n \inf(g, 1/n)$. Quelle est la limite simple de la suite (g_n) ? En déduire que $A \in \mathscr{T}$, puis que $f \in BM(X, \mathscr{T})$. Conclure.

Exercice 13 (Théorème d'Egoroff, **Partiel avril 2007**)

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f.

1. La fonction f est-elle nécessairement mesurable ?
2. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,
$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$
   Montrer que $E_n^k \in \mathscr{T}$· Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?
3. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*, X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ et (f_n) converge uniformément vers f sur $X \setminus A$.

Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 4
Mesure de Lebesgue. Intégration.

Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. On rappelle qu'une propriété $P(x)$ est vraie μ-presque partout (μ-p.p.) si $\mu(\{x \text{ t.q. } P(x) \text{ est fausse}\}) = 0$. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 (**Partiel avril 2007**)

Dans cet exercice, μ est une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ qui vérifie les conditions suivantes :
(C_1) $\forall x \in \mathbf{R}, \mu(\{x\}) = 0$.
(C_2) Pour tous réels $a < b$: $\mu([a,b]) < +\infty$.

1. La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{R}$ vérifie-t-elle ces conditions ? Et la mesure de Dirac δ_0 ?
2. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[)$. Montrer que $\mu(\mathbf{Q}) = 0\cdot$
3. Soit $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On définit la fonction f_A comme suit :

$$f_A : \begin{cases} \mathbf{R} \to [0, +\infty[\\ x \mapsto f_A(x) = \mu(A \cap [-|x|, |x|]) \end{cases}$$

   Pourquoi la fonction f_A est-elle bien définie ? Calculer $f_A(x)$ pour $A = \mathbf{Q}$.
4. On suppose dans cette question que $\mu = \lambda$. Représenter graphiquement l'allure de f_A pour $A = \mathbf{R}$. Même question pour $A = [0,1]$ (il est inutile de justifier le tracé des graphes).

Exercice 2 Invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

1) On a vu précédemment que si $x \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.
(a) On fixe $x \in \mathbf{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to [0, +\infty]$ définie par $\mu(A) = \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$.
(b) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbf{R}}$. On dit que la mesure de Lebesgue est invariante par translation.
2) Soit μ une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ vérifiant $\mu([0,1]) = 1$ et $\mu(x + I) = \mu(I)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$.
(a) Soit B un borélien borné de $\mathbf{R}$; montrer que $\mu(B) < +\infty$. En déduire que μ est σ-finie.
(b) Montrer que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Ainsi la mesure μ est diffuse.
Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$F(t) = \begin{cases} \mu([0,t[) \text{ si } t \geqslant 0 \\ -\mu([t,0[) \text{ si } t \leqslant 0 \end{cases} .$$

(c) Montrer que si $0 \leqslant s \leqslant t$, alors $F(t) - F(s) = F(t - s)$.
(d) En déduire que $F(nt) = nF(t), \forall n \in \mathbf{N}, \forall t \geqslant 0$.
(e) Montrer que cette égalité est encore vraie pour $n \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$.
(f) En déduire que pour tout $r \in \mathbf{Q}$ et $t \in \mathbf{R}$, on a $F(rt) = rF(t)$. Calculer $F(r)$, d'abord pour $r \in \mathbf{Q}$ puis pour tout $r \in \mathbf{R}$.
(g) Déduire de tout cela que $\mu = \lambda$.
Quelles sont les mesures sur $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$ qui sont invariantes par translation ?

Exercice 3

1. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda -$ p.p. $\iff f = g$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les deux propriétés suivantes :
   (P1) : f est continue λ-p.p.
   (P2) : Il existe une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p.p.
   Donner l'exemple d'une fonction f_1 qui vérifie (P1) mais qui ne vérifie pas (P2), et d'une fonction f_2 qui vérifie (P2) mais qui ne vérifie pas (P1).

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$.
5. Soit A un borélien de $\mathbf{R}$. On définit l'application $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ par $f(x) = \lambda(A \cap [-x, x])$. Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que f est continue, puis que pour tout $t \in [0, \lambda(A)]$, il existe un borélien B tel que $B \subset A$ et $\lambda(B) = t$.

Exercice 4 Vrai ou Faux ?
(1) Si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f d\mu = \mu(A)$.
(2) Si $f : E \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$, alors f est intégrable.
(3) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 5 Ecrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :
(a) μ est une mesure de Dirac.
(b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$.

Exercice 6 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Montrer que :
(a) $\displaystyle\int_X f d\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty$ μ-p.p.
(b) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-p.p.

Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 5

Théorème de convergence monotone.

Exercice 1 Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$ et $f : X \to \overline{\mathbf{R}^+}$ une application mesurable.

(a) Soit $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_A f^n d\mu$.

(b) On suppose $\int_X f d\mu < +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{A^c} f^n d\mu$.

Exercice 2 (**Partiel automne 2006**) Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$.

1) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions boréliennes et positives qui converge simplement vers f. On suppose que f_0 est intégrable (c'est-à-dire que $\int f_0 d\mu < \infty$). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} (\cos \pi t)^{2n} d\mu(t)$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $I_n < \infty$.

3) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

4) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercice 3 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.

Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^+} e^{-xt} d\mu(t)$.

(a) Montrer que la fonction F est à valeurs dans $[0, 1]$.

(b) Montrer que la fonction F est décroissante.

(c) Soit (x_n) une suite croissante de réels positifs tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$. Conclusion ?

Exercice 4 (**Partiel automne 2006**)

1) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit $(a_{n,k})_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que :

(H1) $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}^*, a_{n,k} \geqslant 0$;

(H2) pour tout entier n fixé, la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

On note $a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k}$. Montrer que $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit (μ_k) une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :

(H) pour tout $A \in \mathscr{T}$, la suite $(\mu_k(A))$ est croissante.

Pour $A \in \mathscr{T}$, on note $\mu(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(A)$.

En utilisant la question **1**, montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.

3) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, la suite $(\int f d\mu_k)$ est croissante (on pourra commencer par le cas où f est étagée).

4) Sous les hypothèses de la question **2**, montrer que pour toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$, f $\mathscr{T}$-mesurable, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice 5 (**Partiel avril 2007**)

(a) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions boréliennes positives de I dans $\mathbf{R}$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \int_I f_n(x)dx = \int_I \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(x) \right) dx.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 6 (**Partiel avril 2007**)

Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 7 (**Examen juin 2007**)

Soient $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

(1) On suppose que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit $E_n = f^{-1}([n, n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < +\infty$.

(2) On ne suppose plus que μ est finie. Pour $n \in \mathbf{Z}$, soit $F_n = f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} 2^n \mu(F_n) < +\infty$.

Université Claude Bernard Mathématiques
L3 Calcul intégral

Feuille d'exercices numéro 6
Convergence dominée.

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Exercice 1 (Examen Juin 2008 session 2) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n\sin(x/n)}{x^3}dx.$$

Indication : Comment majorer $\sin u$ quand u proche de 0 ?

Exercice 2 Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré et $f : X\to\mathbf{R}$ une fonction μ-intégrable.
1) Pour $n\geqslant 0$, soit $A_n=\{x\in X \text{ t.q. } |f(x)|\geqslant n\}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_{A_n} f d\mu$.
2) On suppose de plus que f est à valeurs strictement positives. On fixe $A\in\mathscr{T}, \mu(A)<+\infty$. Déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_A f^{1/n}d\mu$.

Exercice 3 Soit $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose de plus que f est λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\exp(-n\sin^2 x)f(x)dx.$$

Exercice 4 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R},\mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R})=1$ et $\int_{\mathbf{R}}\exp(a|t|)d\mu(t)<+\infty, \forall a\geqslant 0$.
a) Montrer que $t\longmapsto t^n$ est μ-intégrable pour tout entier positif n.
b) Soit $z\in\mathbf{C}$. Montrer que $t\longmapsto\exp(zt)$ est μ-intégrable.
c) On pose $F(z)=\int_{\mathbf{R}}\exp(zt)d\mu(t)$. Montrer que F a un développement en série entière de la forme

$$F(z)=\sum_{n\in\mathbf{N}}a_nz^n,$$

où l'on explicitera les coefficients (a_n).

Exercice 5 Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré ; on suppose que la mesure μ est finie. Soit $f:X\longrightarrow\mathbf{R}^+$ une fonction $\mathscr{T}-$ mesurable et, pour $n\geqslant 1$, $I_n=\int_X\frac{f^n}{1+f^n}d\mu$. Calculer $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

Exercice 6 Dans cet exercice, X désigne un intervalle de $\mathbf{R}$, muni de sa tribu borélienne.
1. On suppose $X=]0,1[$; soit $0<\alpha<+\infty$. A quelle condition la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur X ?
2. Même question avec $X=[1,+\infty[$ et $X=]0,+\infty[$.
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $X=]0,+\infty[$, et on considère la fonction $f\colon x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f n'est pas intégrable sur X.
4. On introduit $f_n=f.\mathbf{1}_{]0,n]}$; montrer que (f_n) converge uniformément vers f , que chaque f_n est intégrable sur X, et que $\int_X f_nd\lambda$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Conclusion ?

Exercice 7 Montrer que les fonctions suivantes sont λ-intégrables sur I et déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_I f_nd\lambda$
a) $I=[0,1]$ et $f_n(x)=\dfrac{nx\sin x}{1+(nx)^\alpha}$ où $1<\alpha<2$.
b) $I=[A,+\infty[$ où $A>0$ et $f_n(x)=\dfrac{n^2x\exp(-n^2x^2)}{1+x^2}$.
c) $I=[0,1]$ et $f_n(x)=\sqrt{n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}[}(x)$.

Exercice 8 On pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite (f_n).
b) Justifier que, $\forall u \geqslant 0, 1-u \leqslant \exp(-u)$.
c) En déduire que la suite $(\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx)_n$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Exercice 9 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions $\mu-$ intégrables convergente vers 0 μ-pp. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \int_X f_n d\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n\right) d\mu.$$

On pourra utiliser les résultats du cours de L2 sur les séries alternées.

Exercice 10 (**Examen juin 2007**) On considére pour $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$, les fonctions $f_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1/n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, f_n est Lebesgue-intégrable sur $]0,+\infty[$.
(2) Démontrer que pour $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 1$, on a $f_n(x) \leqslant \frac{4}{x^2}$.
(3) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 11 Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^+} f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^+} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 12 On munit l'espace $[0,1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $\mathbf{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x-2/n) & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Calculer $\liminf \int f_n d\lambda$, $\int \liminf f_n d\lambda$, $\limsup \int f_n d\lambda$ et $\int \limsup f_n d\lambda$.
2. Même question avec la suite de fonctions (g_n) définie par $g_{2p} = \mathbf{1}_{[0,1/(2p)]}$, $g_{2p+1} = \mathbf{1}_{[1/(2p+1),1]}$.

Exercice 13

1. Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on peut écrire $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin(x)$. Est-ce vrai pour $x = 0$?
3. En déduite que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 14 (*) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)$, $g_n(x) = (1-\frac{x^2}{n})^{1/2} f_n(x)$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x)dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\infty} g_n(x)dx$.

1. Montrer que $I_n J_n = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice 15 Soit μ une mesure finie sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$m_k = m_k(\mu) = \int_{[0,1]} t^k d\mu(t).$$

a) Déterminer $\lim\limits_{k\to\infty} m_k$.
b) Pour $\gamma > 0$, $p \in \mathbf{N}$, $a \in]0,1]$, on pose

$$J_p(\gamma, a) = \int_{[0,1]} \exp\left(-\gamma(t/a)^p\right) d\mu(t).$$

Montrer que

$$J_p(\gamma, a) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\gamma^k}{a^{pk}} m_{pk}.$$

c) Déterminer $\lim\limits_{p\to\infty} J_p(\gamma, a)$.
d) Soient μ et ν deux mesures finies sur $[0,1]$ vérifiant $m_k(\mu) = m_k(\nu), \forall k \in \mathbf{N}$. Déduire de ce qui précède que pour tous a, b dans $[0,1]$ vérifiant $a < b$, on a $\mu([a,b[) = \nu([a,b[)$.
e) En déduire que $\mu = \nu$.

Exercice 16 Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbf{R}^+$ une fonction telle que, pour tout $n \geqslant 1$, f^n est $\mu-$ intégrable. On pose $A = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) \geqslant 1\}$, $B = \{x \in X \text{ t.q. } f(x) > 1\}$ et $J_n = \int_X f^n d\mu$

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (b) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
   (c) $\mu(B) = 0$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (d) La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} J_n$ est convergente.
   (e) La suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (f) $\mu(A) = 0$.

Feuille d'exercices numéro 7
Fonctions définies par des intégrales.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\frac{dt}{1+t^2}$.
(1) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbf{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
(2) Etablir l'égalité valable pour tout réel x :

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x|, \text{ où } C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

(3a) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.
(3b) En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
(3c) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbf{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.
(4) Déduire de tout cela la valeur de la constante C.

Exercice 2 Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)dt\right)^2$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}dt$.
(1a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.
(1b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
(2) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^\infty \exp(-t^2)dt$ puis de $J = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \exp(-t^2/2)dt$.

Exercice 3 (examen juin 2007, 2ème session)
On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}dx$.

1) Montrer que $I(\alpha)$ est bien définie lorsque $\alpha \geqslant 0$.
2) Montrer que la fonction $I : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3) Montrer que I est continue en 0.

4a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
4b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
4c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geqslant 0$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}^+, \mathscr{B}_{\mathbf{R}^+})$ telle que $\mu(\mathbf{R}^+) = 1$.
(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $t \to \cos(xt)$ est μ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On pose alors pour $x \geqslant 0, F(x) = \int_{\mathbf{R}^+} \cos(xt)d\mu(t)$.
(2) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$.
(3) On suppose que l'application $t \to t^2$ est μ-intégtrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-F(x)}{x^2}$. On pourra remarquer et justifier l'inégalité $1 - \cos(u) \leqslant u^2/2$.

(4) On ne suppose plus que $t \to t^2$ est μ-intégrable, mais on suppose que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2} = 0$.
(4a) Soit G définie sur $\mathbf{R}^+$ par $G(x) = \dfrac{1-F(x)}{x^2}$. Montrer que G est bornée sur $\mathbf{R}^+$.
(4b) En déduire que $t \to t^2$ est μ-intégrable. On pourra penser au lemme de Fatou.
(4c) Que peut-on en déduire pour la mesure μ ?

Exercice 6 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{ixt} e^{-t^2/2} dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$.
(3a) Montrer que F satisfait à une équation différentielle du premier ordre.
(3b) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 7 Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right) dt$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.
(2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
(3) Montrer que pour $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.
(4) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel. On utilisera aussi le résultat de la question 2 de l'exercice 2.

Exercice 8 Pour $x > 0$ et $t > 0$, on pose $f(t,x) = \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.
(1) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \to f(t,x)$ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
Pour $t > 0$, on pose $F(t) = \int_0^\infty f(t,x)dx$.
(2a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.
(2b) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
(2c) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice 9 Pour $y > 0$, soit $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2} dx$.
(1) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}^+$. Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim_{y\to+\infty} F(y)$.
(2a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
(2b) Montrer que F vérifie sur $\mathbf{R}_+^*$ une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)dx$.
(2c) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geqslant 0$.
(2d) Retrouver enfin la valeur de I.

Exercice 10
(1) Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
(2) Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer ensuite que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 11 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, calculer $F'(x)$ puis $F(x)$.

Exercice 12 (*) Soit $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{x(1+x^2)} dx$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$. Calculer $F'(t)$ puis $F(t)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 13 On rappelle qu'on a vu lors d'un TD précédent que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.

1. Pour tout $t \geq 0$ on pose $S(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \sin(x) dx$.

   a Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

   b Déterminer la limite de S en $+\infty$ puis $S(t)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.

2. Soit $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que $\displaystyle\left| \int_A^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{2}{A}$.

3. Prouver que pour tout $A > 0$ on a $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \int_0^A \frac{e^{-tx} \sin(x)}{x} dx = \int_0^A \frac{\sin(x)}{x} dx$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Feuille d'exercices numéro 8
Mesures produits

Exercice 1 On désigne par λ (respectivement μ) la mesure de Lebesgue (respectivement la mesure de comptage) sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$. Soit $\Delta = \{(x,x); x \in [0,1]\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbf{R}^2$? Justifier ensuite l'existence des intégrales itérées suivantes, et les comparer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$$I_2 = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_\Delta(x,y) d\mu(y) \right) d\lambda(x)$$

Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?

Exercice 2 Pour $x \in \mathbf{R}$ et $y > 0$, on pose $f(x,y) = y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a,b] \times [0,1]$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln(y)} dy.$$

Exercice 3 Pour $y > 0$, on pose $f_y(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
2. Soit $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbf{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est bien définie et que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.
2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

   En déduire que $I = \pi^2/4$.

3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$F_\mu(t) = \mu(]-\infty, t[); G_\mu(t) = \mu(]t, +\infty[); H_\mu(t) = \mu(\{t\}).$$

1. Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

2a. Soit ν une autre mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\nu(\mathbf{R}) = 1$. Montrer que $\int_{\mathbf{R}} F_\mu d\nu = \int_{\mathbf{R}} G_\nu d\mu$.

2b. Soit $D_\mu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu = \{t \in \mathbf{R} \text{ t.q. } H_\nu(t) \neq 0\}$. Justifier que les ensembles D_μ et D_ν sont au plus dénombrables et montrer l'égalité suivante

$$\int_{\mathbf{R}} F_\mu d\nu + \int_{\mathbf{R}} F_\nu d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{t\})\nu(\{t\}) = 1.$$

Exercice 6 Soit μ une mesure sur $\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour $s > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$H_s^\mu(x) = H_s(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{s}{s^2 + (x-t)^2} d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que $H_s^\mu = H_s^\nu \Longrightarrow \mu = \nu$.

1. Montrer que H_s est continue sur $\mathbf{R}$ et déterminer la limite de $H_s(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} sH_s(a)$.
3. Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{s \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b H_s(x)dx$.
4. Soient μ et ν deux mesures sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telles que $\mu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) = 1$. On suppose que $H_s^\mu = H_s^\nu$ pour tout $s > 0$. Montrer que $\mu = \nu$.

Exercice 7 Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice 8 Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y < 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y < 3x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est borélienne.
2. Prouver que pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f(., y)$ est Lebesgue-intégrable ; pour tout y on définit $\varphi(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dx$. Montrer que φ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbf{R}} \varphi(y)dy$.
3. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x, .)$ est Lebesgue-intégrable ; pour tout x on définit $\psi(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x,y)dy$. Montrer que ψ est Lebesgue-intégrable et calculer $\int_{\mathbf{R}} \psi(x)dx$.
4. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 9 (**Examen juin 2007**)

Pour x réel, soit $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du = 2\int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{x}{u}\right)^2 - u^2\right] du.$

(a) Montrer que la fonction F ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

(b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x > 0$.

(c) En déduire la valeur de $F(x)$ en fonction de $F(0)$ pour x réel.

(d) Ecrire $F(0)^2$ comme une intégrale sur $\mathbf{R}^2$ et en déduire la valeur de $F(0)$ (on pourra penser aux coordonnées polaires).

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x/x$ n'est pas λ-intégrable sur $\mathbf{R}^+$. On peut néanmoins définir l'intégrale comme suit, à condition que la limite existe
$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \overset{def}{=} \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$
2. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \exp(-xy)\sin(x)$. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$?
3. Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[0,A] \times \mathbf{R}^+$ pour tout nombre $A > 0$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 11 Soit μ une mesure sur $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_{\mathbf{R}})$ telle que $\mu(\mathbf{R}) = 1$. Pour x réel, on pose
$$\phi(x) = \int_{\mathbf{R}} \exp(ixt) d\mu(t).$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur $\mathbf{R}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ et $a \in \mathbf{R}$. Montrer que
$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \exp(-iax)\phi(x)dx = \int_{\mathbf{R}} K_n(t-a)d\mu(t)$$
où K_n est une fonction que l'on explicitera.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n}\displaystyle\int_{-n}^{n} \exp(-iax)\phi(x)dx$.
4. En déduire que si ϕ est λ-intégrable sur $\mathbf{R}$, alors μ est une mesure diffuse.

Exercice 12

En calculant de deux façons
$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x}\sin(2xy)dydx,$$
déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

Exercice 13 Dans cet exercice, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et $f\colon E \to \mathbf{R}^+$ une fonction mesurable.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbf{R}^+ \colon f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}^+)$.
2. En utilisant le théorème de Tonelli, prouver que
$$\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E\colon f(x) \geq t\})dt$$
3. Soit maintenant $\varphi\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant le fait que $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(t)dt$, montrer que
$$\int_E \varphi\circ f d\mu = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)\mu(\{x \in E\colon f(x) \geq t\})dt$$

Contrôle continu partiel du 28 novembre 2011

Mesure et Intégration (Licence L3). Semestre d'automne 2011

La durée de l'épreuve est de 1h30. Les deux exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra ; un barème sur 21 points figure à titre indicatif. On attachera du prix à la présentation et à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 8 points)

Question 1 (1 point). Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 0$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} & si\ 0 \leq x \leq n \\ 0 & si\ x > n \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$.

Question 2 (2 points). Calculer, pour tout réel $x \geq 0$, la limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$.

Question 3 (2 points). Montrer que l'on a : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$ pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$.

Question 4 (3 points). Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1.$$

EXERCICE 2 (sur 13 points)

Notations. On considère l'espace mesuré $(X,\mathcal{B},\lambda)$, où $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ est la tribu des Boréliens de $[0,1]$, et λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On désigne par $(B_1, B_2, \ldots)$ une suite infinie de parties Boréliennes de X, et on note B l'ensemble des $x \in [0,1]$ qui appartiennent à une infinité de B_n. Enfin, on appelle subdivision de $\mathbb{R}$ une suite $\sigma = (t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie :

(i) $t_k < t_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\delta(\sigma) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |t_{k+1} - t_k| < +\infty$;

(ii) $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$ et $\lim_{k\to-\infty} t_k = -\infty$.

Question 1 (2 points). Montrer que B est un Borélien de $[0,1]$ (Indication : on pourra remarquer que $B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$).

Question 2 (3 points). On suppose que $\sum_{n\geq 1} \lambda(B_n) < +\infty$. Montrer que l'ensemble B est $\lambda-$négligeable.

Dans ce qui suit, on désigne par $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable sur X.

Question 3 (3 points). Soit $\sigma = (t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une subdivision de $\mathbb{R}$ et posons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $B_k = \{x \in [0,1] \mid t_k \le f(x) < t_{k+1}\}$. Montrer que B_k est un Borélien de $[0,1]$ et que l'on a :

(i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(B_k) = 1$,

(ii) $t_k \lambda(B_k) \le \int_{B_k} f d\lambda \le t_{k+1}\lambda(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Question 4 (3 points). Choisissons, pour toute subdivision $\sigma = (t_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, un point $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|\xi_k \lambda(B_k)| \le \delta(\sigma)\lambda(B_k) + \int_{B_k} |f| \, d\lambda .$$

En déduire la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k \lambda(\{x \in [0,1] \mid t_k \le f(x) < t_{k+1}\})$.

Question 5 (2 points). On pose $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k \lambda(\{x \in [0,1] \mid t_k \le f(x) < t_{k+1}\})$.

Montrer que l'on a $\left| \int_0^1 f d\lambda - S(f,\sigma,\xi) \right| \le \delta(\sigma)$; en déduire que :

$$\int_0^1 f d\lambda = \lim_{\delta(\sigma)\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k \lambda(\{x \in [0,1] \mid t_k \le f(x) < t_{k+1}\}) .$$

—

CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DU 28 NOVEMBRE 2011

CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1

QUESTION 1 - La fonction f_n est continue par morceaux, donc Borélienne. Elle est bornée et nulle en dehors de $[0,n]$; elle est donc Lebesgue-intégrable. ∎

QUESTION 2. $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = e^{n\log(1+\frac{x}{n})}e^{-2x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x e^{-2x} = e^{-x}$ ∎

QUESTION 3 $(1+x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, donc l'inégalité est vraie pour $n=1$.
Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $n-1$. Posons $\varphi(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.
On a : $\varphi'(x) = e^x - \frac{n}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Donc φ est croissante, et comme $\varphi(0)=0$, on a : $\varphi(x) \geq 0$ quel que soit $x \geq 0$, d'où $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$. ∎

QUESTION 4. D'après la question 2, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$. En outre :

$$|f_n(x)| \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \leq e^x e^{-2x} = e^{-x}.$$

Comme la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Il s'ensuit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = 1$. ∎

EXERCICE 2

QUESTION 1. Si $x \in B$, alors il existe pour tout $n \geq 1$ un entier $k \geq n$ tel que $x \in B_k$, d'où $B \subset \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$. Inversement, si $x \in \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$, il existe pour tout $n \geq 1$ un entier $k \geq n$ tel que $x \in B_k$, et donc x appartient à une infinité de B_k. On a donc

$$B = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right)$$

et comme $\mathcal{B}$ est une tribu, on a $B \in \mathcal{B}$. ∎

QUESTION 2. Comme les $C_n = \bigcup_{k\geq n} B_k$ forment une suite décroissante de Boréliens tels que $\lambda(C_1) \leq \lambda([0,1]) = 1 < +\infty$, on a :

$$\lambda(B) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(C_n).$$

Or $\lambda(C_n) = \lambda\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \lambda(B_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\sum_{n\geq 1} \lambda(B_n) < +\infty$

on a $\lambda(B) = 0$. ■

QUESTION 3

Comme f est λ-intégrable, elle est mesurable, et puisque la tribu est celle des Boréliens, elle est Borélienne. Mais alors

$$B_k = f^{-1}([t_k, t_{k+1}[) \in \mathcal{B}$$

car $[t_k, t_{k+1}[$ est un Borélien de $\mathbb{R}$. Les B_k sont deux à deux disjoints et de réunion $X = [0,1]$. On a donc :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_1} \lambda(B_k) = \lambda(X) = 1$$

Enfin, si $x \in B_k$, on a : $t_k \leqq f(x) < t_{k+1}$, d'où

$$t_k \mathbb{1}_{B_k} \leqq f \mathbb{1}_{B_k} \leqq t_{k+1} \mathbb{1}_{B_k}.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$t_k \lambda(B_k) \leqq \int_{B_k} f d\lambda \leqq t_{k+1} \lambda(B_k).$$ ■

QUESTION 4. Pour $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, on a :

$$\xi_k \lambda(B_k) \in [t_k \lambda(B_k), t_{k+1} \lambda(B_k)].$$

D'après la question 3, on a :

$$\int_{B_k} f d\lambda \in [t_k \lambda(B_k), t_{k+1} \lambda(B_k)].$$

On a donc : $$\left| \xi_k \lambda(B_k) - \int_{B_k} f d\lambda \right| \leqq (t_{k+1} - t_k) \lambda(B_k) \leqq \delta(\sigma) \lambda(B_k).$$

On en déduit que :

$$|\xi_k \lambda(B_k)| \leqq \delta(\sigma) \lambda(B_k) + \left| \int_{B_k} f d\lambda \right| \leqq \delta(\sigma) \lambda(B_k) + \int_{B_k} |f| d\lambda.$$

Comme $\sum_{k \geqq 1} \lambda(B_k) = 1$ et que $\sum_{k \geqq 1} \int_{B_k} |f| d\lambda = \int_X |f| d\lambda$ (en vertu du théorème de convergence monotone), la série $\sum_k \xi_k \lambda(B_k)$ est absolument convergente, donc convergente. ■

QUESTION 5. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\int_0^1 f d\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}_1} \int_{B_k} f d\lambda \text{ ; d'où } \left| \int_0^1 f d\lambda - S(f, \sigma, \xi) \right| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_1} \int_{B_k} f d\lambda - \xi_k \lambda(B_k) \right|$$

$$\leqq \sum_{k \in \mathbb{Z}_1} \left| \int_{B_k} f d\lambda - \xi_k \lambda(B_k) \right| \leqq \sum_{k \in \mathbb{Z}_1} \delta(\sigma) \lambda(B_k) = \delta(\sigma) \lambda([0,1]) = \delta(\sigma).$$ Il

s'ensuit que $\int_0^1 f d\lambda = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} S(f, \sigma, \xi)$, d'où le résultat. ■

Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2011-2012
Licence STS, UE MAT 3002L (Mesure et Intégration)

Contrôle continu terminal du vendredi 20 janvier 2012

La durée de l'épreuve est de 3h. L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre qui vous convient. Un barème (sur 21 points) figure à titre indicatif ; on attachera du prix à la rédaction des solutions.

Exercice (sur 4 points)

On considère la fonction $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x \text{ si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Question 1 (2 points). Montrer que la fonction f est Lebesgue-intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Question 2 (2 points). Calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Problème (sur 17 points)

Question 1 (3 points). Montrer que, si la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $\left[0, +\infty\right[$, alors les fonctions $x \to \frac{\sin^2 x}{x}$, $x \to \frac{\cos x}{x}$, $x \to \frac{\cos^2 x}{x}$ sont intégrables au sens de Lebesgue sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$. En déduire que la fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $\left[0, +\infty\right[$.

Dans ce qui suit, on cherche à établir la convergence de l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx$, et à calculer sa valeur. A cet effet, on considère la fonction $f : \left[0, +\infty\right[\times \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \exp(-xy) \sin x .$$

Question 2 (4 points). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la fonction $f_x(y) = f(x, y)$ est intégrable sur $\left[0, +\infty\right[$ pour la mesure de Lebesgue

dy. Calculer $\int_0^{+\infty} f_x(y)dy$. En déduire que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ pour la mesure de Lebesgue deux dimensionnelle $dx\,dy$ (*Indication* : on pourra utiliser la conclusion de la question 1).

Question 3 (3 points). Montrer que l'on a $|f(x,y)| \leq exp(-xy)x$ pour tout $x \geq 0$ et tout $y \geq 0$. En déduire que, pour tout $X > 0$ fixé, la fonction f est intégrable sur $[0,X]\times[0,+\infty[$ pour la mesure de Lebesgue deux dimensionnelle $dx\,dy$.

Question 4 (1 point). Montrer que l'on a, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X \tfrac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^X exp(-xy)\sin x\,dx\right)dy.$$

Question 5 (2 points). Montrer que l'on a, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X exp(-xy)\sin x dx = \tfrac{1}{1+y^2} - exp(-Xy)\frac{\cos X - y\sin X}{1+y^2}.$$

Question 6 (3 points). Montrer que l'on a :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^{+\infty} exp(-Xy)\frac{\cos X - y\sin X}{1+y^2}dy = 0.$$

Question 7 (1 point). Déduire de ce qui précède que l'intégrale impropre :

$$I = \int_0^{+\infty} \tfrac{\sin x}{x}\,dx$$

converge, et donner sa valeur.

Université Claude Bernard Lyon I. Année universitaire 2010-2011
Licence STS, UE MAT 3002L (Calcul Intégral)

CONTRÔLE CONTINU PARTIEL DU LUNDI 29 NOVEMBRE 2010

La durée de l'épreuve est de 2H30. Un barème figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction des solutions.

EXERCICE 1 (sur 10 points)

On note $\mathfrak{I}$ la famille des Boréliens de $\mathbb{R}$ qui sont dénombrable ou de complémentaire dénombrable. Si $A \in \mathfrak{I}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction caractéristique de A. Enfin, on désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on note $d\lambda(x) = dx$.

Question 1 (1 point). Montrer que $\mathfrak{I}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

Question 2 (3 points). Montrer que, pour tout $A \in \mathfrak{I}$, la fonction $x \to \dfrac{\mathbf{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $A \in \mathfrak{I}$, on pose :

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{1}_A(x)}{1+x^2} d\lambda(x) = \int_A \frac{dx}{1+x^2}$$

Montrer que μ est une mesure positive finie sur $\mathfrak{I}$. Montrer enfin que les ensembles $\mu-$négligeables de l'espace $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}, \mu)$ sont les sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$.

Question 3 (3 points). Soit $e : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction simple relativement à l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}, \mu)$. Montrer qu'il existe un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable sur lequel e prend une valeur constante. Montrer que, si la suite $(e_1, e_2, \ldots)$ de fonctions simples converge $\mu-$presque partout vers la fonction f, alors $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est constante sur un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable.

Question 4 (3 points). Déduire de la question 3 qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mu-$mesurable si et seulement si elle est constante sur un Borélien de $\mathbb{R}$ de complémentaire dénombrable. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mu-$intégrable si et seulement si elle prend une valeur constante c réelle sur un Borélien de complémentaire dénombrable, et que l'on a dans ce cas : $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = c\pi$.

EXERCICE 2 (sur 5 points)

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \geq 0$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)}.$$

Question 1 (2 points). Montrer que la fonction f_n est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

Question 2 (3 points). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)} dx$.

EXERCICE 3 (sur 6 points)

On considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,t) = \frac{1-exp(-t^2x)}{t^2}.$$

Question 1 (2 points). Montrer que l'application $t \to f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable sur $]0,\infty[$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Question 2 (3 points). Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$ (on admettra que $\int_0^{+\infty} exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Question 3 (1 point). Déduire de ce qui précède la valeur de $F(x)$ pour tout $x \geq 0$. Vérifier que F n'est pas dérivable à droite en 0. Montrer que ce dernier résultat pouvait être obtenu directement à partir de la définition de F, sans calculer explicitement $F(x)$.

Partiel de Calcul intégral du 29 novembre 2010

CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1

Question 1. Comme les Boréliens forment une tribu sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que $\mathcal{C}=\{A\subset\mathbb{R} \mid A$ est dénombrable ou A^c est dénombrable$\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}\in\mathcal{C}$ et si $A\in\mathcal{C}$, alors $A^c\in\mathcal{C}$. Il suffit donc de vérifier que si $A_1, A_2, \dots$ appartiennent à $\mathcal{C}$, alors $\bigcup_n A_n\in\mathcal{C}$. Si tous les A_n sont dénombrables, la réunion des A_n est dénombrable et $\bigcup_n A_n\in\mathcal{C}$. S'il existe n_0 tel que $A_{n_0}^c$ soit dénombrable, alors $\left(\bigcup_n A_n\right)^c=\bigcap_n A_n^c\subset A_{n_0}^c$, et $\left(\bigcup_n A_n\right)^c$ est dénombrable. ■

Question 2. Si $A\in\mathcal{T}$, alors A est Borélien et $x\longmapsto \frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue mesurable comme quotient d'une fonction Borélienne et d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Comme on a :

$$\left|\frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2}\right|\leqq\frac{1}{1+x^2} \quad \text{et que } x\longmapsto\frac{1}{1+x^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R},$$

la fonction $x\longmapsto\frac{\mathbb{1}_A(x)}{1+x^2}$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

μ est une mesure $\geqq 0$ car si $A_1, A_2, \dots$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\int_{\mathbb{R}}\sum_n\frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2}\,dx=\sum_n\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2}\,dx=\sum_n\mu(A_n)$$

en vertu du théorème d'interversion des signes $\sum$ et $\int$, qui est justifié puisque l'on a :

$$\left|\sum_{n\leqq N}\frac{\mathbb{1}_{A_n}(x)}{1+x^2}\right|\leqq\frac{1}{1+x^2} \quad \text{et } x\mapsto\frac{1}{1+x^2} \text{ est}$$

intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $\mu(\mathbb{R})=\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}=\pi<+\infty$, la mesure μ est finie. Soit $A\in\mathcal{F}$ tel que $\mu(A)=0$. Alors, soit A est dénombrable, et comme un ensemble dénombrable est λ-négligeable, on a bien que tout ensemble dénombrable est μ-négligeable. Soit A^c est dénombrable, en quel cas $\mathbb{1}_A$ est presque partout égale à 1 et $\mu(A)=\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$, ce qui est absurde. Donc, les $A\in\mathcal{F}$ tels que $\mu(A)=0$ sont les parties dénombrables de $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que les ensembles μ-négligeables de $(\mathbb{R},\mathcal{T},\mu)$ sont les parties dénombrables de $\mathbb{R}$. ■

Question 3. Une réunion finie de parties deux à deux disjointes de $\mathcal{T}$ est soit un ensemble dénombrable (si toutes les parties sont dénombrables), soit une réunion d'un seul ensemble de complémentaire dénombrable (deux parties de complémentaire dénombrable ne peuvent pas être disjointes) et d'un ensemble dénombrable. Il s'ensuit que, si $e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction simple $\mathcal{T}$-mesurable, elle est de la forme $e=c\,\mathbb{1}_A+e\,\mathbb{1}_{A^c}$ où $A\in\mathcal{T}$ est de complémentaire dénombrable et $c\in\mathbb{R}$. La fonction e prend donc une valeur constante sur le Boréleen A de complémentaire dénombrable. Supposons alors que $e_n = c_n 1\!\!1_{A_n} + e_n 1\!\!1_{A_n^c}$ converge μ-presque partout vers la fonction f. Posons :

$$A = \bigcap_n A_n \in \mathcal{T}.$$ Alors $A^c = \bigcup_n A_n^c$ est dénombrable, et quitte à retirer de A un ensemble D dénombrable, on sait que $e_n(x) = c_n \longrightarrow f(x)$ pour $x \in A \setminus D = A'$. Il s'ensuit que f est constante sur $A' \in \mathcal{T}$ dont le complémentaire A'^c est dénombrable. ∎

Question 4. Si $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable, elle est limite simple de fonctions simples, et ce qui précède montre que f est constante sur un Boréleen de complémentaire dénombrable. Supposons inversement que :

$$f = c\, 1\!\!1_A + f\, 1\!\!1_{A^c}$$ avec $c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $A \in \mathcal{T}$ de complémentaire dénombrable. Alors, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq \alpha\} = \{x \in A \mid c \leqq \alpha\} \cup \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\}$$
$$= \begin{cases} A \cup \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} & \text{si } c \leqq \alpha \\ \{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} & \text{si } c > \alpha \end{cases}$$

Comme $\{x \in A^c \mid f(x) \leqq \alpha\} = D$ est dénombrable (il est inclus dans A^c), on a : $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqq \alpha\} \in \mathcal{T}$, car cet ensemble est soit égal à $A \cup D$ (et de complémentaire dénombrable), soit égal à D (et il est alors dénombrable). Ainsi, $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ est μ-mesurable si et seulement si elle est de la forme $f = c\, 1\!\!1_A + f\, 1\!\!1_{A^c}$ avec $c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $A \in \mathcal{T}$ de complémentaire dénombrable, donc si et seulement si elle est constante sur un Boréleen de complémentaire dénombrable. Si f est μ-mesurable $\geqq 0$, on a : $f = c\, 1\!\!1_A + \sum_{n \geqq 1} f(a_n)\, 1\!\!1_{\{a_n\}}$ avec $c \geqq 0$ et $A^c = \{a_1, a_2, \dots\}$. On a donc :

$$\int f\, d\mu = \int \operatorname{Sup}_n f_n\, d\mu \quad \text{où} \quad f_n = c\, 1\!\!1_A + \sum_{p \leqq n} f(a_p)\, 1\!\!1_{\{a_p\}}$$

et, comme $f_n \leqq f_{n+1}$ pour tout n, on a :

$$\int f\, d\mu = \operatorname{Sup}_n \int f_n\, d\mu = \operatorname{Sup}_n \Big(c\mu(A) + \sum_{p \leqq n} f(a_p)\, \mu(\{a_p\}) \Big).$$

Or $\mu(\{a_p\}) = 0$ car $\{a_p\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, et $\mu(A) = \pi$ comme on l'a déjà vu. On a donc

$$\int f\, d\mu = c\pi.$$

Il s'ensuit que, si $f = c\, 1\!\!1_A + f\, 1\!\!1_{A^c}$ est μ-mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, elle est μ-intégrable si et seulement si $|c| < +\infty$, i.e. si et seulement si $c \in \mathbb{R}$, donc si et seulement si elle prend une valeur $c \in \mathbb{R}$ constante sur un Boréleen de complémentaire dénombrable. Alors, $f^\pm$ prend la valeur $c^\pm$ sur ce Boréleen, d'où

$$\int f\, d\mu = (c^+ - c^-)\pi = c\pi.$$ ∎

EXERCICE 2

Question 1. La fonction f_n est continue, donc Lebesgue-mesurable sur $[0,+\infty[$. Par ailleurs, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{(1+nx)(1+x)}$$

Comme $\frac{n}{(1+nx)(1+x)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{n\,dx}{(1+nx)(1+x)} < +\infty$,

d'où l'on déduit que f_n est Lebesgue-intégrable sur $[0,+\infty[$. ■

Question 2. Pour $x=0$, $f_n(x)=0 \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x>0$, $f_n(x) = \frac{n}{1+nx}\,\frac{\sin x}{1+x} \to \frac{\sin x}{x(1+x)}$ quand $n \to +\infty$. Posons $f(x) = \frac{\sin x}{x(1+x)}$ pour $x>0$ et $f(0)=0$. Cette fonction f est prolongeable par continuité en $x=0$ en remplaçant la valeur en 0 par 1. Par ailleurs, on a :

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x(1+x)}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty,$$

de sorte que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ au sens de Lebesgue.

On a $f_n(x) \to f(x)$ pour tout x d'après ce qui précède. Par ailleurs, on a pour tout $x>0$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{n}{n+\frac{1}{x}}\,\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+x}\right| \leq \frac{|\sin x|}{x(1+x)} = h(x)$$

et h est intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et vérifie

$$h(x) \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{pour } x \geq 1 \quad \text{avec } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin x}{(1+nx)(1+x)}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x)}\,dx. \quad ■$$

EXERCICE 3

Question 1. Si $x=0$, $f(0,t)=0$ et $t \mapsto f(0,t)$ est intégrable. Si $x>0$, $\frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} x$, et $t \mapsto f(x,t)$ se prolonge continûment en $t=0$.

On a alors : $\int_1^{+\infty} |f(x,t)|\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$ car $1-\exp(-t^2x) \leq 1$ pour $t \geq 0$, de sorte que $t \mapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable sur $[1,+\infty[$. Comme cette fonction se prolonge continûment à $[0,1]$, elle est intégrable sur $]0,+\infty[$. Posons :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt.$$

À $t>0$ fixé, l'application $x \mapsto \frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2}$ est continue.

Par ailleurs, on a pour $a>0$:

$$0\leqq x\leqq a \implies \left|\frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2}\right| \leqq \frac{1-\exp(-t^2a)}{t^2} = f(a,t), \text{ et}$$

l'on sait que $t\mapsto f(a,t)$ est intégrable. D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction F est continue sur $[0,a]$ pour tout $a>0$. Elle est donc continue sur $[0,+\infty[$. ▣

Question 2. On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \exp(-t^2x)$ et, pour $0<a\leqq x$

on a : $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqq \exp(-t^2a)$. Comme la fonction $t\mapsto\exp(-t^2a)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, la fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2x)dt$$

en vertu du théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales. Posons $u=\sqrt{x}\,t$ dans l'intégrale ci-dessus. On obtient :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\exp(-u^2)\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{pour } x\geqq a>0.$$

Comme ceci est vrai pour tout a, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour } x>0. ▣$$

Question 3. De la question 2, on déduit que :

$$F(x) = \sqrt{\pi}\sqrt{x}+C \quad , \text{ où } C \text{ est une constante réelle.}$$

Quand $x\to 0$, $F(x)\to F(0)=0$ en vertu de la question 1, et donc $C=0$. On a donc $F(x)=\sqrt{\pi x}$, et par conséquent F n'est pas dérivable à droite en $x=0$.

On aurait pu montrer directement que F n'est pas dérivable en $x=0$ à partir de la relation :

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = \int_0^{+\infty}\frac{1-\exp(-t^2x)}{t^2x}dt.$$

Posons $\varphi(u) = \frac{1-\exp(-u)}{u}$; on a : $\varphi'(u) = \frac{u\exp(-u)-(1-\exp(-u))}{u^2}$

$$= \frac{\exp(-u)(u+1)-1}{u^2}.$$

Or $\frac{d}{du}(\exp(-u)(u+1)) = -u\exp(u) \leqq 0$ pour $u\geqq 0$, d'où $\exp(-u)(u+1) \leqq \exp(-0)=1$ pour $u\geqq 0$, et $\varphi'(u)\leqq 0$, ce qui prouve que φ est décroissante. Si $x_n\searrow 0$, $\varphi(t^2x_n)\nearrow 1$ et

$$\frac{F(x_n)-F(0)}{x_n} = \int_0^{+\infty}\varphi(t^2x_n)dt \longrightarrow \int_0^{+\infty}dt = +\infty$$ en vertu du théorème de convergence monotone. Donc F n'est pas dérivable en 0. ▣