Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Cursus Pharmacie-Ingénieurs
Mathématiques et Économie
15 mars 2018

# Ingénieurs 4. Corrigé du contrôle continu N. 1.

La durée de totale de l'epreuve est de 50 minutes. Documents et calculatrices autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

**Exercice 1.** Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, de limite $\ell$. Calculer, pour $N \geq 2$, la somme partielle de type téléscopique

$$\sum_{n=0}^{N}(b_n + b_{n+1} - 2b_{n+2})$$

et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + b_{n+1} - 2b_{n+2})$.
*(Après avoir terminé l'exercice, vérifiez sur un brouillon si vos réponses sont correctes : testez vos formules dans le cas particulier d'une suite constante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, c, \ldots)$. Les résultats sont-ils cohérents ?)*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}(b_n + b_{n+1} - 2b_{n+2}) &= \sum_{n=0}^{N} b_n + \sum_{n=0}^{N} b_{n+1} - 2\sum_{n=0}^{N} b_{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{N} b_n + \sum_{n=1}^{N+1} b_n - 2\sum_{n=2}^{N+2} b_n \\
&= b_0 + 2b_1 - b_{N+1} - 2b_{N+2} \qquad \text{(après simplification)}
\end{aligned}$$

Maintenant, en prenant $N \to +\infty$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n + b_{n+1} - 2b_{n+2}) = b_0 + 2b_1 - 3\ell$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 2.** Soit $a > 0$. La série $\sum(a^n + \frac{1}{a^n})$ est-elle convergente ? Justifier.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Observons que si $a = 1$, on a $a^n + \frac{1}{a^n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, Mais alors la série $\sum(a^n + \frac{1}{a^n})$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0).
Pour $0 < a < 1$ on a $a^n \to 0$ et $\frac{1}{a^n} \to +\infty$. Pour $a > 1$, on a $a^n \to +\infty$ et $\frac{1}{a^n} \to 0$. Dans les deux cas, $(a^n + \frac{1}{a^n}) \to +\infty$ et donc $\sum(a^n + \frac{1}{a^n})$ est une série grossièrement divergente.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Exercice 3.**
On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles correspondantes. **Vrai ou faux ?** Justifier les réponses avec une courte démonstration ou un contrexemple. *(Seules les réponses avec une justification correcte seront prises en compte dans la notation)*.
(i) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(ii) Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(iii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(iv) Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

(i) FAUX : pour le voir, prendre par exemple la suite constante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \ldots)$, qui converge. La suite des sommes partielles est $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \ldots)$, qui est manifestement divergente.
(ii) VRAI : Si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire si la série $\sum a_n$ converge, alors nécessairement $a_n \to 0$.
(iii) FAUX : le même contrexemple qu'au point (i) s'applique : la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.
(iv) VRAI : on a $a_n = S_n - S_{n-1}$. Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors il existe $A \geq 0$ tel que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [-A, A]$. Mais alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [-2A, 2A]$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .