Cursus pharmacie-ingénieurs
Examen du 14 avril 2016 – Durée : 1h00
Calculatrice et documents autorisés.

Exercice 1.

1. Trouver tous les réels x tels que $\cos(\pi x)^2 = 1$.
2. Démontrer que la suite de fontions $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \cos(\pi x)^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R}$$
converge simplement dans $\mathbb{R}$ vers une fonction **discontinue** $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera.
3. La convergence $f_n \to f$ est-elle uniforme dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2.

1. Donner la somme de la série géométrique
$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{x}{2}\Big)^n,$$
en précisant les réels x pour lesquels cette série converge.
2. En utilisant la théorie des séries entières, préciser pour quels réels x les séries suivantes convergent et calculer les sommes $B(x)$ et $C(x)$:
$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-1}, \qquad C(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-2}.$$
3. Trouver une relation entre $B(x)$ et la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\big(\frac{x}{2}\big)^n$. En déduire la somme de cette série.

Exercice 3. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ données par
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_{2n} - u_n.$$

1. La suite (u_n) est-elle convergente ?
2. En utilisant les inégalités $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$, préciser des bornes d'intégration convenables pour que les inégalités suivantes soient vraies :
$$\int_{\cdots}^{\cdots} \frac{1}{x}\,dx \leq v_n \leq \int_{\cdots}^{\cdots} \frac{1}{x}\,dx.$$
3. En appliquant le théorème des gendarmes, en déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2.$$

Corrigé de l'examen du 14 avril 2016

Exercice 1. 1. La fonction cos vaut ± 1 aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\cos(\pi x)^2 = 1$ si et seulement si x est un entier relatif.

2. Si $x \in \mathbb{Z}$, $f_n(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$. Si $x \in \mathbb{R}$ et x n'est pas un entier, on a $0 \leq \cos(\pi x)^2 < 1$ et donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(\cos(\pi x)^2\big)^n = 0$. En conclusion, la suite de fonctions (f_n) converge simplement dans $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \end{cases}$$

qui est discontinue aux points entiers.

3. La convergence $f_n \to f$ ne peut pas être uniforme ans $\mathbb{R}$, puisque que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues dans $\mathbb{R}$ serait une fonction continue dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. 1. $A(x)$ est la somme de la série géométrique de raison $\frac{x}{2}$. Cette série converge pour $-2 < x < 2$, et

$$A(x) = \frac{2}{2-x}, \qquad -2 < x < 2.$$

2. Il s'agit de deux séries entières. On reconnait la série dérivée de $A(x)$ et la série "dérivée seconde". La théorie des séries entières affirme que ces séries ont le même rayon de convergence (égale à 2) et que $A'(x) = B(x)$ et $A''(x) = B'(x) = C(x)$. Ainsi,

$$B(x) = \frac{2}{(2-x)^2}, \qquad C(x) = \frac{4}{(2-x)^3}, \qquad -2 < x < 2.$$

3. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{x}{2}\Big)^n = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-1} = \frac{xB(x)}{2} = \frac{x}{(2-x)^2}.$$

Exercice 3. 1. La série $\sum \frac{1}{k}$ étant divergente (par le critère de Riemann), la suite (u_n) diverge.

2. On a $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Par comparaison somme/intégrale il en découle

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq v_n \leq \int_n^{2n} \frac{1}{x}\,dx.$$

D'où:

$$\ln\Big(\frac{2n+1}{n+1}\Big) = \ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq v_n \leq \ln(2n) - \ln n = \ln 2.$$

Mais $\lim_{n\to+\infty} \ln\Big(\frac{2n+1}{n+1}\Big) = \ln 2$ et par le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln 2$.