Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

Ingénieurs 4. Corrigé de l'examen terminal d'analyse du 14 mai 2018

Exercice 1. Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2+n}.$$

Soit $a > 0$.

1. Préciser sur lesquels des intervalles suivants la série est normalement convergente : $[0,a]$, $[a,+\infty[$.
2. Préciser sur lesquels des intervalles suivants la série est uniformément convergente : $[0,a]$, $[a,+\infty[$.
3. Calculer la somme partielle $S_0(x)$. En déduire une constante $c \in \mathbb{R}$ et une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|S(x) - c| \leq g(x)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Solution. Posons $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2+n}$.

1. Sur $[0,a]$ on a $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \sup_{x\in[0,a]} |(-1)^n f_n(x)| = \sum \frac{1}{1+n}$ qui diverge. Donc la série n'est pas normalement convergente sur $[0,a]$.

   Sur $[a,+\infty[$, on a $\|f_n\|_\infty = \sum \sup_{x\geq a} |(-1)^n f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2a^2+n} \overset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2a^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc la série converge normalement sur $[a,+\infty[$
2. Travaillons dans l'intervalle $[0,+\infty[= \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on voit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive et décroissante. Nous avons alors affaire à une série alternée. Si $R_n(x)$ est le reste d'ordre n, on a $|R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) \leq \frac{1}{1+n}$. La dernière inégalité étant indépendente de $x \in \mathbb{R}^+$, on voit que $\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \frac{1}{1+n}$ et donc $\|R_n\|_\infty \to 0$. La suite des restes $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle, on a que la série qui définit $S(x)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$, et donc sur $[0,a]$ et $[a,+\infty[$.
3. On a $S_0(x) = 1$ et $S(x) = S_0(x) + R_0(x)$, où $|R_0(x)| \leq f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ainsi, $|S(x) - 1| \leq \frac{1}{1+x^2}$. On voit en particulier que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1$.

Exercice 2. En utilisant la théorie des séries entières (en particulier, le théorème de dérivation d'une série entière) et un changement de variable approprié, calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cos(x)^n,$$

en précisant pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ cette série est-elle convergente.

Solution. Posons $y = \cos x$. Observons que pour, tout $-1 < y < 1$ on a (utiliser dans le passage (*) la formule de dérivation d'une série entière et dans le passage (**) la formule donnant la somme de la série géométrique),

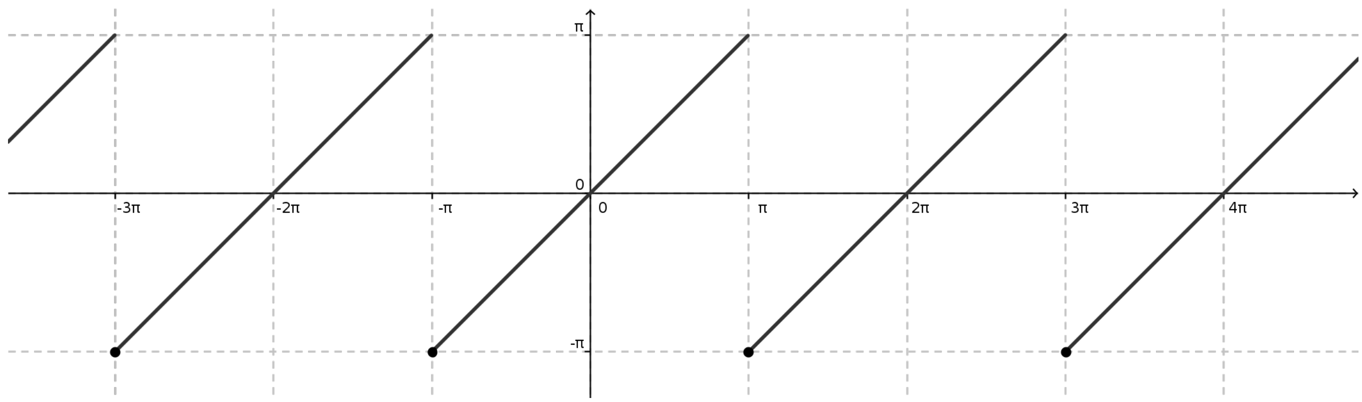
$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^n = \sum_{n=1}^{\infty} ny^n = y\sum_{n=1}^{\infty} ny^{n-1} \overset{(*)}{=} y\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right)' \overset{(**)}{=} y\left(\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{y}{(1-y)^2}.$$

Mais alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a $\sum_{n=0}^{\infty} n\cos(x)^n = \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$. Pour x de la forme $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la série est grossièrement divergente.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = x$ pour tout $-\pi \leq x < \pi$. On note $S(f)(x)$ sa série de Fourier.

1. Dessiner la fonction f.
2. Combien vaut $f(\pi)$? Et $f(\pi-)$, $f(\pi+)$? En déduire la valeur de $S(f)(\pi)$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire l'expression de la série de Fourier $S(f)(x)$

Solution.

1. 

2. On a, grâce à la périodicité de f et au fait que $f(x) = x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi$. De plus, $f(\pi-) = \lim_{x\to\pi-} f(x) = \lim_{x\to\pi-} x = \pi$ et
$f(\pi+) = \lim_{x\to\pi+} f(x) = \lim_{x\to\pi+} f(x-2\pi) = \lim_{x\to\pi+}(x-2\pi) = -\pi$. Or, la fonction f étant 2π-périodique et régulière par morceaux, on a $S(f)(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = 0$.

3. Pour calculer les coefficients de Fourier on a le choix entre les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{1}$$

ou les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2}$$

Pour cet exercice, il est plus aisé de se servir des formules (1), puisque sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$ la fonction vérifie simplement $f(x) = x$. Par contre, il n'est pas vrai que $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
On a $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$, puisque $x \mapsto x\cos(nx)$ est une fonction impaire, et son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est donc nulle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en intégrant par parties,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x}_{=0} = -\frac{2(-1)^n}{n}.$$

La série de Fourier de f est alors de la forme

$$S(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$