Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

Cursus Pharmacie-Ingénieurs
14 mai 2018

# Ingénieurs 4. Examen terminal. Epreuve d'analyse

La durée de recommandée de l'épreuve d'analyse est de 1h30. Documents et calculatrices autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

**Exercice 1.** Soit $x \geq 0$ et
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2x^2 + n}.$$
Soit $a > 0$.

1. Préciser sur lesquels des intervalles suivants la série est normalement convergente : $[0, a]$, $[a, +\infty[$.
2. Préciser sur lesquels des intervalles suivants la série est uniformément convergente : $[0, a]$, $[a, +\infty[$.
3. Calculer la somme partielle $S_0(x)$. En déduire une constante $c \in \mathbb{R}$ et une fonction $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|S(x) - c| \leq g(x)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

**Exercice 2.** En utilisant la théorie des séries entières (en particulier, le théorème de dérivation d'une série entière) et un changement de variable approprié, calculer la somme
$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cos(x)^n,$$
en précisant pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ cette série est-elle convergente.

**Exercice 3.** Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique, telle que $f(x) = x$ pour tout $-\pi \leq x < \pi$. On note $S(f)(x)$ sa série de Fourier.

1. Dessiner la fonction $f$.
2. Combien vaut $f(\pi)$ ? Et $f(\pi-)$, $f(\pi+)$ ? En déduire la valeur de $S(f)(\pi)$.
3. Calculer les coefficients de Fourier de $f$. En déduire l'expression de la série de Fourier $S(f)(x)$