Ingénieur 4 - Analyse.
Examen du 6 mai 2021 – Durée : 2 heures
Documents autorisés : notes manuscrites, polycopié.

Exercice 1

1. Établir si la série $\sum(-1)^n$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.
2. Établir si la série $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$.

Exercice 2

1. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge.

   On note $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$.
2. Donner les valeurs des sommes partielles S_0, S_1 et S_2
3. À l'aide d'une estimation du reste de la série, démontrer que $\frac{289}{720} < S < \frac{391}{720}$

Exercice 3 Soit $a > 0$.

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} a^n$.
2. Calculer le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum \frac{n}{1+a^n} x^n$.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{1+a^n} x^{2n}$.

Exercice 4 On s'intéresse à la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Les critères de comparaison, de Riemann, de Cauchy ou d'Alembert ne permettent pas de conclure facilement quant à la nature de cette série. On procède alors par comparaison avec une intégrale impropre.

1. Pour $x > 1$, on pose $F(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Calculer $F'(x)$.
2. Soit $1 < a < b$. Calculer, à l'aide de la question précédente, $\int_a^b \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x$.
3. L'intégrale impropre $\int_a^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
4. La série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 5 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^4}$

1. Démontrer que $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et continue dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que F est dérivable dans $\mathbb{R}$, exprimer la dérivée comme la somme d'une série et calculer $F'(0)$.

Corrigé (1.1) $|(-1)^n|=1$, donc la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et alors $\sum(-1)^n$ diverge

(1.2) Soit $S_N=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\longrightarrow\frac{3}{2}$ pour $N\to\infty$. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

(2.1) $\left(\frac{1}{(2n)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, convergente vers 0.
Par le critère des séries alternées, $\sum\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge

(2.2) $S_0=\frac{1}{0!}=1$ $\quad S_1=\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$ $\quad S_2=\frac{1}{0!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}=\frac{13}{24}$

(2.3) $|S-S_2|=|R_2|\leq\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$ par l'estimation du reste d'une série alternée

Donc $S_2-\frac{1}{720}\leq S\leq S_2+\frac{1}{720}$, c'àd $\frac{13}{24}-\frac{1}{720}\leq S\leq\frac{13}{24}+\frac{1}{720}$

donc $\frac{389}{720}\leq S\leq\frac{391}{720}$

(3.1) $a>0$: $\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & 0<a<1\\ 1, & a=1\\ \infty, & a>1\end{cases}$

(3.2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{1+a^{n+1}}}{\frac{n}{1+a^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a^n}{1+a^{n+1}}\quad\left(\text{puisque }\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\right)$$
$$=\begin{cases}1 & \text{si } 0<a\leq 1\\ \frac{1}{a}, & \text{si } a>1\end{cases}$$
Donc le rayon de convergence est $R_a=\begin{cases}1 & \text{si } 0<a\leq 1\\ a & \text{si } a>1\end{cases}$

(3.3) Posons $y=x^2$. D'après 3.2 le rayon de c.v. de la série $\sum\frac{n}{1+a^n}y^n$ est R_a et ~~cette~~ série converge pour $-R_a<y<R_a$ et diverge pour $|y|>R_a$. Donc $\sum\frac{n}{1+a^n}x^{2n}$ converge pour $-\sqrt{R_a}<x<\sqrt{R_a}$ et diverge pour $|x|>\sqrt{R_a}$. Le rayon de convergence est alors $R_a=\begin{cases}1, & 0<a\leq 1\\ \sqrt{a}, & a>1.\end{cases}$

(4.1) $F(x) = \frac{1}{\ln x}$ $\quad F'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$, pour $x>0$.

(4.2) $$\int_a^b \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_a^b -F'(x)dx = -F(b)+F(a) = -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln a}$$

(4.3) $$\int_a^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}, \quad (a>1)$$

(4.4) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est de même nature que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

(puisque la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est décroissante et ≥ 0 sur $[a, +\infty[$)

et donc converge d'après la question (4.3)

(5.1) $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^2x)}{n^4}$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n(x) = \frac{\cos(n^2x)}{n^4}$

est continue et $$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$, puisque $|\cos(n^2x)| \leq 1$.

et la dernière série converge par le critère de Riemann.

Donc la série qui définie F est une série normalement convergente de fonctions continues dans $\mathbb{R}$. Donc F est bien définie dans $\mathbb{R}$ et continue.

(5.2) La «série dérivée» est $\sum \left(\frac{\cos(n^2x)}{n^4}\right)' = \sum \left(-\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right)$

Cette série est normalement convergente dans $\mathbb{R}$, (puisque $\sum \left\| -\frac{\sin(n^2x)}{n^2} \right\|_\infty \leq \sum \frac{1}{n^2}$ converge).

Donc F est dérivable et $F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

En particulier, $$F'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\sin(n^2 \cdot 0)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Ingénieur 4 - Analyse.
Examen du 6 mai 2021 – Durée : 2 heures
Documents autorisés : notes manuscrites, polycopié.

Exercice 1

1. Établir si la série $\sum(-1)^n$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.
2. Établir si la série $\sum(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$ est convergente et si c'est le cas calculer la somme $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$.

Exercice 2

1. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ converge.

   On note $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}$.
2. Donner les valeurs des sommes partielles S_0, S_1 et S_2
3. À l'aide d'une estimation du reste de la série, démontrer que $\frac{289}{720}<S<\frac{391}{720}$

Exercice 3 Soit $a>0$.

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} a^n$.
2. Calculer le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum \frac{n}{1+a^n}x^n$.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{n}{1+a^n}x^{2n}$.

Exercice 4 On s'intéresse à la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$. Les critères de comparaison, de Riemann, de Cauchy ou d'Alembert ne permettent pas de conclure facilement quant à la nature de cette série. On procède alors par comparaison avec une intégrale impropre.

1. Pour $x>1$, on pose $F(x)=\frac{1}{\ln(x)}$. Calculer $F'(x)$.
2. Soit $1<a<b$. Calculer, à l'aide de la question précédente, $\int_a^b \frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$.
3. L'intégrale impropre $\int_a^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?
4. La série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 5 Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2x)}{n^4}$

1. Démontrer que $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est bien définie et continue dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que F est dérivable dans $\mathbb{R}$, exprimer la dérivée comme la somme d'une série et calculer $F'(0)$.