Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

Cursus Pharmacie-Ingénieurs
Juin 2022

Ingénieurs 4. Examen de session 2. Epreuve d'analyse

Documents et calculatrices autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum n3^n x^n$ et $\sum \frac{5^n}{n} x^n$.
2. Trouver le rayon de convergence R de la série entière $\sum (n3^n + \frac{5^n}{n}) x^n$.
3. Préciser la nature de la série de la question 2 pour $x = R$ et $x = -R$.

Exercice 2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f_n(x) = x^2 e^{nx}$.

1. Calculer la dérivée de f_n et trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_n'(x) = 0$.
2. Démontrer que
$$\sup\{f_n(x) \colon x \leq 0\} = \frac{A}{n^2},$$
où A est un réel que l'on déterminera.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniformément convergente dans $]-\infty, 0]$?
4. La série de fonctions $\sum f_n$ est-elle uniformément convergente dans $]-\infty, 0]$?
5. Calculer, pour $x \leq 0$, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. (Utiliser la formule pour les séries géométriques).

Exercice 3 Posons, pour $n \in N^*$ et $a \in \mathbb{R}$
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{1}{n^{2a}}.$$

1. Étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction du paramètre a.
2. Étudier la nature de $\sum v_n$ en fonction du paramètre a.

Exercice 4.

1. Montrer que si $f \colon [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et décroissante, alors
$$\forall a \geq 2 \qquad \int_a^{a+1} f(x)\,dx \leq f(a) \leq \int_{a-1}^{a} f(x)\,dx$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, préciser des bornes d'intégration convenables pour que l'encadrement suivant soit vrai
$$\int_{\dots}^{\dots} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq \int_{\dots}^{\dots} f(x)\,dx.$$
3. Dans cette question on considère le cas de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer les intégrales de la question précédente. En appliquant le théorème des gendarmes démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k) = \ln 2$.
4. Dans cette question on considère les cas des fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{x^2}$, et ensuite $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Dans les deux cas, calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k)$