Ingénieurs 4. Analyse Examen du 5 mai 2022, 1ère session. Durée 2h.

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\pi]$ par

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin x + 1}{n^2 + x + 1}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions dans l'intervalle $[0,\pi]$.
2. La convergence de (f_n) est-elle uniforme dans $[0,\pi]$?
3. Sans chercher une primitive de f_n, calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx.$$

Exercice 2. On considère les deux séries entières

$$\sum (-1)^n 2^n x^n \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n 2^n}{2n+1} x^n.$$

1. Démontrer que ces deux séries entières sont de même rayon de convergence R. Calculer R.
2. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les séries ci-dessus sont-elles convergentes ? Distinguer les cas $-R < x < R$, $x = \pm R$ et $|x| > R$.

Exercice 3. On considère la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ et sa somme partielle $S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^4}$.

1. Calculer, en fonction de $A > 0$, l'intégrale impropre

$$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx.$$

2. En déduire l'encadrement pour le reste $R_{10} = S - S_{10}$:

$$0.0001 < S - S_{10} < 0.001.$$

3. Si l'on souhaite approcher la valeur de la somme S en calculant la somme partielle S_{10}, combien de chiffres décimales après la virgule seront correctes ? (On ne demande pas de calculer S_{10}).

Exercice 4. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}.$$

Expliquer pourquoi la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, mais la série $\sum u_n$ est divergente. Observer que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \to +\infty$. Pourquoi cela ne contredit pas le critère des équivalents ?