Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Ingénieurs 4. Examen d'analyse 2023. Session 1

La durée de totale de l'epreuve est de 2h. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit $a > 0$.

1. Donner un équivalent pour $n \to +\infty$ de la suite $\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1}\right)$. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série 1

$$\sum\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1}\right)$$

est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs de $a > 0$ l'égalité suivante est-elle justifiée ? 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a+1}.$$

Exercice 2. On pose $f(x) = \sin(\pi x)$.

1. Donner la nature de l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. 1
2. Donner la nature de la série $\sum f(n)$. 1

Exercice 3. Préciser les valeurs de $\alpha > 0$ pour les quelles les séries de fonctions

$$\sum \frac{1}{n^\alpha + e^x} \qquad\qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + e^x}.$$

convergent sur $\mathbb{R}$ normalement, absolument, simplement ou uniformément. Synthétiser les résultats trouvés dans un tableau.

	normalement	absolument	simplement	uniformément
$\sum \frac{1}{n^\alpha + e^x}$				
$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + e^x}$				

4

Exercice 4.

1. Quelle est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$? Et celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$? (Préciser les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles ces séries convergent). 1 8
2. Trouver les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux séries entières 1

$$\sum \frac{1}{n8^n}x^n, \qquad\qquad \sum \frac{1}{n8^n}x^{3n}.$$

3. On pose, 4

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n8^n}x^n, \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n8^n}x^{3n}$$

Exprimer $S'(x)$ et $T'(x)$ comme les sommes d'une série et ensuite calculer $S'(x)$ et $T'(x)$.

4. En déduire une expression pour $S(x)$ et $T(x)$.

2

Exercice 5 au verso

Exercice 5. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, où $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1 1. Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1 2. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$. Observer que la limite simple f n'est pas une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Dessiner sur le même graphique les fonctions f_1, f_2 et f_3.

1 3. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.
(On pourra se servir de l'égalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.)

1 4. Étudier la convergence simple de $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$. Observer que la limite simple de $(f_n')_{n\geq 1}$ est une fonction discontinue.

1 5. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f_n')_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$.

1 6. Calculer, sans chercher une primitive de f_n,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE

(1) $a>0$ $0 \le \frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1} = \frac{1}{n^a(n^a+1)} \sim \frac{1}{n^{2a}}$ $(n\to\infty)$

et $\sum\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1}\right)$ converge pour $a>\frac{1}{2}$

L'égalité $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^a+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a+1}$ est justifiée quand les deux séries à droite convergent, c.à.d pour $a>1$

EXERCICE

(2) $\int_0^{\infty}\sin(\pi x) = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\lim_{b\to+\infty}\left(-\cos 0 + \cos(\pi b)\right)$

et cette limite n'existe pas, donc l'intégrale diverge

$\sum\sin(\pi n) = \sum 0$ converge

Ici série et intégrale n'ont pas la même nature.

EXERCICE

(3)

	normalement	absolument	simplement	uniformément
$\sum\frac{1}{n^\alpha+e^x}$	$\alpha>1$	$\alpha>1$	$\alpha>1$	$\alpha>1$
$\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha+e^x}$	$\alpha>1$	$\alpha>1$	$\alpha>0$	$\alpha>0$

$\left\|\frac{1}{n^\alpha+e^x}\right\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n^\alpha+e^x}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$

$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+e^x}$ vérifie les hypothèses du théo des séries alternées

EXERCICE

(4) 1) pour $|a|<1$: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\,8^n}{(n+1)\,8^{n+1}} = \frac{1}{8}$ Donc $R_1 = 8$

Alors $R_2 = \sqrt[3]{8} = 2$ comme on le constate à l'aide du changement de variable $y = x^3$ et en appliquant le résultat précédent à la série $\sum \frac{1}{n 8^n} y^n$.

3) $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n 8^n} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{8}\right)^n = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{8}} = \frac{1}{8-x}$.

$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n 8^n} x^{3n-1} = \frac{3}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^3}{8}\right)^n = \frac{3}{x} \cdot \frac{\frac{x^3}{8}}{1 - \frac{x^3}{8}} = \frac{3x^2}{8-x^3}$

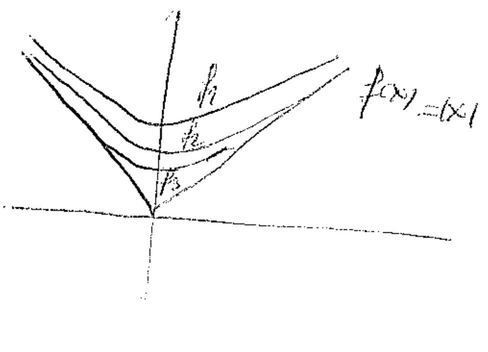
4) $S(x) = \int_0^x S'(t)\,dt + \underbrace{S(0)}_{=0} = \left[-\ln(8-t)\right]_0^x = -\ln(8-x) + \ln 8$

$T(x) = S(x^3) = -\ln(8-x^3) + \ln 8$.

EXERCICE

(5) $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ $\quad f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}}$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ simplement sur $\mathbb{R}$. On voit que f n'est pas dérivable en 0



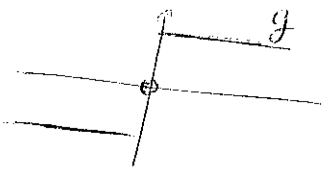
$\forall x \in \mathbb{R}$

(3) $$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - \sqrt{x^2}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ et la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

(4) $$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}} \to \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \\ 0 \quad \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Donc $f_n'(x) \to g(x) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



et la fonction g est bien discontinue en 0

(5) la convergence de (f_n') vers g ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$, sinon g serait continue (en tant que limite uniforme de fonctions continues.

(6) $$\lim_{n \to +\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\,dx \overset{(*)}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_{-1}^{0} (-x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(*) la convergence uniforme autorise l'échange de la limite avec l'intégrale