

Ingénieurs 4. Examen d'analyse 2023. Session 1

La durée de totale de l'épreuve est de 2h. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Soit $a > 0$.

1. Donner un équivalent pour $n \rightarrow +\infty$ de la suite $(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^{a+1}})$. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la série

$$\sum \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^{a+1}} \right)$$

est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs de $a > 0$ l'égalité suivante est-elle justifiée ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{n^{a+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1}}.$$

Exercice 2. On pose $f(x) = \sin(\pi x)$.

- Donner la nature de l'intégrale impropre $\int_0^{\infty} f(x) dx$.
- Donner la nature de la série $\sum f(n)$.

Exercice 3. Préciser les valeurs de $\alpha > 0$ pour les quelles les séries de fonctions

$$\sum \frac{1}{n^\alpha + e^x} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + e^x}.$$

convergent sur \mathbb{R} normalement, absolument, simplement ou uniformément. Synthétiser les résultats trouvés dans un tableau.

	normalement	absolument	simplement	uniformément
$\sum \frac{1}{n^\alpha + e^x}$				
$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + e^x}$				

Exercice 4.

- Quelle est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$? Et celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$?
 (Préciser les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles ces séries convergent).
- Trouver les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux séries entières

$$\sum \frac{1}{n8^n} x^n, \qquad \sum \frac{1}{n8^n} x^{3n}.$$

3. On pose,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n} x^n, \qquad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n} x^{3n}$$

Exprimer $S'(x)$ et $T'(x)$ comme les sommes d'une série et ensuite calculer $S'(x)$ et $T'(x)$.

4. En déduire une expression pour $S(x)$ et $T(x)$.

Exercice 5 au verso

Exercice 5. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$, où $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $f'_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R} . Observer que la limite simple f n'est pas une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Dessiner sur le même graphique les fonctions f_1 , f_2 et f_3 .
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R} .
(On pourra se servir de l'égalité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.)
4. Étudier la convergence simple de $(f'_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R} . Observer que la limite simple de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction discontinue.
5. Étudier la convergence uniforme de la suite de $(f'_n)_{n \geq 1}$ sur \mathbb{R} .
6. Calculer, sans chercher une primitive de f_n ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx.$$