Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Ingénieurs 4. Examen d'analyse 2024. Session 1

La durée de totale de l'epreuve est de 2h. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. Calculer l'intégrale impropre

$$\int_2^{+\infty} (\frac{1}{x^2} + e^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que $\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_n \to 2$.

1. Que peut-on dire de $\sum \alpha_n$?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+2})$.
3. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$.

Exercice 3.

1. Quelles sont les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la formule $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est correcte ?
2. En modifiant la formule précédente, écrire le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 4. Pour $n = 1, 2, \ldots$, on définit $f_n \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^2 e^{-\sqrt{n}x}, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ et trouver la solution $x \in \mathbb{R}^+$ de l'équation $f_n'(x) = 0$.
2. Dessiner le graphe de f_n, pour $n = 1, 2, 3$, sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence de la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, +\infty[$:
   i) simple, sur $[0, +\infty[$, ii) uniforme, sur $[0, +\infty[$
4. L'affirmation : « Pour tout $x > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ »
   est une conséquence de quel théorème ?
5. En utilisant l'affirmation de la question précédente, étudier la convergence de la **série** de fonctions $\sum f_n$:
   i) simple, sur $[0, +\infty[$, ii) normale, sur $[0, +\infty[$, iii) normale, sur $[1, +\infty[$
   .
6. On pose, pour $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   i) La fonction S est-elle continue sur $[1, +\infty[$?
   ii) La fonction S est-elle continue en 0 ? (*On pourra considérer $N = 2, 3, \ldots$ et minorer* $S(\frac{1}{N}) \geq \sum_{n=1}^{N^2} f_n(\frac{1}{N})$.