Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Ingénieurs 4. Examen d'analyse 2025. Session 1

La durée de totale de l'epreuve est de 2h. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Calculer l'intégrale impropre
$$\int_1^{+\infty} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})\,\mathrm{d}x.$$
2. Donner la nature de la série
$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Exercice 2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, telle que $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 5$ et $\alpha_n \to 3$.

1. Que peut-on dire de $\sum \alpha_n$?
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$ et $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n - \alpha_{n+2})$.
3. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$.

Exercice 3.

1. Rappeler la formule donnant la somme d'une série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} y^n$, pour $-1 < y < 1$.
2. Calculer la somme des séries entières suivantes, après avoir déterminé le rayon de convergence.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(4+(-1)^n\right)^n}\, x^n.$$

Exercice 4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$,
$$f_n(x) = \sqrt{n}\, x e^{-nx} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. Soit $0 < a < b$. Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.
6. Expliquer pourquoi la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.
7. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. Démontrer que $S(\frac{1}{N}) \geq \frac{1}{e}$ et conclure que S est discontinue en 0. La série de fonctions $\sum f_n(x)$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$?