

Cursus pharmacie-ingénieurs. UE Ingénieurs 4
Partiel du 17 mars 2016 – Durée : 1h00

Documents autorisés : notes manuscrites, photocopiés, calculatrices.

Exercice 1 Étudier la convergence et la convergence absolue de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + 1},$$

en fonction du paramètre $\alpha \geq 0$

Exercice 2 Soit $r > 1$ et $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n}$.

1. Calculer la somme S en fonction de r .

2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner une formule pour la somme $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n}$ et en déduire la

$$\text{somme } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{r^n}.$$

3. On suppose dans cette question $r = 10$. Comment faut-il choisir N pour que $0 < S - S_N < 0.001$?

Exercice 3 On note \mathbb{N}^* l'ensemble de entiers strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $u_n = \frac{((n+2)!)^2}{(2n-1)!}$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 3$.

4. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (cette limite $\ell \geq 0$ existe par le théorème sur les suites décroissantes). Déduire de la réponse à la question 2 que $\ell = 0$.

5. Calculer $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}^*\}$.

CORRECTION DU PARTIEL DU 17

exercice 1

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}}$$

(a) Si $\alpha = 0$: $\sum \frac{(-1)^n}{2}$ diverge parce que le terme général $\frac{(-1)^n}{2}$ tend pas vers 0.

(b) Si $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est une suite décroissante de limite nulle, et $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \geq 0$. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}}$ converge par le théorème des séries alternées.

Pour la convergence absolue, observons que $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1}} \right| = \sum \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

et $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \geq 0$, $\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

Par le critère de Riemann, la série est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$

exercice 3

$$u_n = \frac{((n+2)!)^2}{(2n-1)!}$$

$$1) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+3)!)^2 (2n-1)!}{(2n+1)! ((n+2)!)^2} = \frac{(n+3)^2}{(2n+1)2n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2}{4n^2 \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$3) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+3)^2}{(2n+1)2n} \leq 1 \quad \text{ssi} \quad n^2 + 6n + 9 \leq 4n^2 + 2n$$

$$\text{ssi} \quad 3n^2 - 4n - 9 \geq 0 \quad (\text{avec } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{ssi} \quad n \geq \frac{2 + \sqrt{31}}{3}$$

$$(\text{avec } n \in \mathbb{N}^*), \text{ssi } n \geq 3$$

donc $u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \geq 3$.

4) Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0$. Si $l > 0$ on a:

$$\text{On a } \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{l}{l}, \text{ d'où } l = \frac{1}{4}l: \text{ c'est absurde.}$$

donc $l = 0$.

$$5) \sup \{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} = u_3 = \frac{(5!)^2}{5!} = 5! = 120$$

$$\inf \{u_n : n \in \mathbb{N}^*\} = 0, \text{ en effet } u_n \geq 0 \text{ pour tout } n \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

exercice 2

$$r > 1$$

$$1) S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{r^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$2) S_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{r}} \quad \text{Donc } R_N = S - S_N = \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$\text{et alors } R_N = \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{(r-1)r^N}$$

$$3) \text{ On veut } 0 < R_N = S - S_N < 0,001$$

$$\text{Mais } r = 10 \text{ et } R_N = \frac{1}{9 \cdot 10^N} < 0,001 = \frac{1}{1000}$$

si et seulement si

$$1000 < 9 \cdot 10^N, \text{ c'est à dire } N \geq 3.$$