Université Claude Bernard Lyon 1
69622 Villeurbanne cedex, France

30 mars 2017

Corrigé

UE-PHOP045E Ingenieur 4. Contrôle d'analyse. Durée 30 min.

Exercice 1. Calculer la somme des séries $\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{4^n}$.

La première série est de type téléscopique :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right)=\frac{1}{2}$$

La séconde série est de type géométrique :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right)-1-\frac{1}{4}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

. . . .

Exercice 2. Calculer l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty}(1+x)^{-3}\mathrm{d}x$.

$$\int_2^{+\infty}(1+x)^{-3}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(1+x)^{-2}}{-2}\right]_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(1+b)^{-2}}{-2}-\frac{3^{-2}}{-2}\right)=\frac{3^{-2}}{-2}=\frac{1}{18}.$$

. . . .

Exercice 3 Donner un exemple d'une série alternée absolument convergente.

Par exemple, la série

$$\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$$

convient. En effet, il s'agit clairement d'une série alternée et la série $\sum\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

. . . .