Cursus pharmacie-ingénieurs
Partiel du 17 mars 2022 – Durée : 1h00
Notes manuscrites, polycopiés, calculatrices autorisés.

Exercice 1 Calculer la dérivée et la limite pour $x \to +\infty$ de la fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Calculer ensuite

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(1+n)}{1+n}.$$

Exercice 2 Préciser la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes. Il n'est pas demandé de détailler la réponse.

$$\sum \frac{1}{(n+1)^3}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

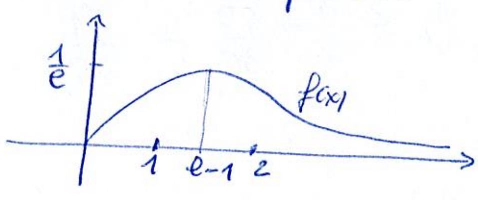
Exercice 3

1. Démontrer que les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sont convergentes.
2. Calculer la somme $S = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
(*Indication :* on pourra observer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).
3. Calculer la somme $S' = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
4. En déduire que
$$\frac{19}{12} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{21}{12}.$$

---

1) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\qquad f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ $\qquad f'(x)=0$ ssi $\ln(1+x)=1$
ssi $1+x=e$
ssi $x=e-1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée.



$f(e-1) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

$f(1) = \frac{\ln 2}{2}$

$f(2) = \frac{\ln 3}{3}$. Donc $f(1)<f(2)$

Conclusion :
$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} f(x) = f(e-1) = \frac{1}{e}$ et $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(n) = f(2) = \frac{\ln 3}{3}$

$\boxed{2}$ $\Sigma \frac{1}{(n+1)^3}$ est de même nature que $\Sigma \frac{1}{n^3}$, qui converge

$\Sigma \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge d'après le théorème des séries alternées

$\Sigma \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est de même nature que $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$, qui diverge

$\boxed{3}$ $\Sigma \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

$\Sigma \frac{1}{n(n+1)}$ converge par comparaison, puisque $0 \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$

$$S = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=4}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{4}$$

$$S' = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=4}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{49}{36} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Mais $\frac{1}{4} \leq \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{3}$. Donc

$$\frac{58}{36} = \frac{1}{4} + \frac{49}{36} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{3} + \frac{49}{36} = \frac{61}{36}$$

Donc

$$\frac{19}{12} < \frac{58}{36} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{61}{36} < \frac{21}{12}$$