Cursus pharmacie-ingénieurs
Partiel du 17 mars 2022 – Durée : 1h00
Notes manuscrites, polycopiés, calculatrices autorisés.

Exercice 1 Calculer la dérivée et la limite pour $x \to +\infty$ de la fonction $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. Calculer ensuite

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \qquad \text{et} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(1+n)}{1+n}.$$

Exercice 2 Préciser la nature (convergente ou divergente) des séries suivantes. Il n'est pas demandé de détailler la réponse.

$$\sum \frac{1}{(n+1)^3}, \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Exercice 3

1. Démontrer que les séries $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sont convergentes.
2. Calculer la somme $S = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
   (*Indication :* on pourra observer que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).
3. Calculer la somme $S' = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$
4. En déduire que

$$\frac{19}{12} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{21}{12}.$$

.