Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

23 mars 2023

NOM .... **Prénom** .... N. étudiant ....

Ingénieurs 4. Contrôle d'analyse.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

3

Exercice 1. On pose, pour n entier naturel, $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

1. Calculer $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ et ensuite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum x_n$.

$x_n > 0$; $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow \dfrac{1}{4}$

Donc Σx_n converge par le critère de D'Alembert

5

Exercice 2.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$?
2. Calculer la somme de la série téléscopique $S = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}})$.
3. Trouver $\alpha, c > 0$ tels que l'on ait l'équivalent $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$, pour $n \to +\infty$.

1) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (critère de Riemann)

2) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{N+2}} - \frac{1}{\sqrt{N+3}}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} = \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}} = \frac{\cancel{n}+3-\cancel{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+3}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{2n^{3/2}}$$

(4) **Exercice 3.** Soit $a > 0$ et $N \in \mathbb{N}$.

1. Calculer l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} (4+x)^{-2}\,dx$

2. Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} (4+n)^{-2}$ et $S_N = \sum_{n=1}^{N} (4+n)^{-2}$. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, préciser une valeur de N telle que $0 < S - S_N < 0.001$.

$$\int_a^{+\infty} (4+x)^{-2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-(4+x)^{-1}\right]_a^b = (4+a)^{-1} - \underbrace{\lim_{b\to+\infty}(4+b)^{-1}}_{=0}$$

$$= (4+a)^{-1}$$

Soit $R_N = S - S_N$. On a $f(n) = (4+n)^{-2}$

et $(f(n))$ est une suite positive décroissante de limite nulle.

Par comparaison série-intégrale

$$\int_{N+1}^{+\infty} (4+x)^{-2}\,dx \leq R_N \leq \int_{N}^{+\infty} (4+x)^{-2}\,dx$$

Donc

$$0 < (5+N)^{-1} \leq S - S_N \leq (4+N)^{-1} \underset{(*)}{\leq} 0{,}001$$

(*) vrai pour $4+N > 1000$

c.à.d $N \geq 996$

Donc $N = 997$ convient

3 **Exercice 4.** Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ? Sont-elles convergentes ?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}+1}, \quad \sum \frac{1}{n^2+i}.$$

1) $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

2) $\left|\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}+1}\right| \sim \frac{1}{n}$

3) $\left|\frac{1}{n^2+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \leq \frac{1}{n^2}$

les séries 1) et 3) sont absolument convergentes (et donc convergentes)

La série 2) n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente grâce au théorème des séries alternées