Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Mars 2025

NOM .... **Prénom** .... N. étudiant ....

Ingénieurs 4. Contrôle d'analyse.

La durée de totale de l'epreuve est d'une heure. Documents et calculatrice autorisés. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty} 9^{1/n}$ et en déduire la nature de la série $\sum 9^{1/n}$. Calculer ensuite la somme de type téléscopique
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty}(9^{1/n} - 9^{1/(n+1)}).$$
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n}$.
3. Calculer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$ et $A \geq 0$, on a $0 \leq \sqrt{x^2 + A^2} - x \leq A$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3.

1. Donner la nature des séries suivantes

$$(i)\ \sum \frac{n}{2^n}, \qquad (ii)\ \sum \frac{n}{n^2+1}, \qquad (iii)\ \sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$