

Développements limités

9.1

1. Trouver le développement limité d'ordre 2 de $x \rightarrow e^x - \frac{1}{1-x}$ au point 0.
2. Trouver le développement limité d'ordre 3 de $x \rightarrow \frac{\cos x}{1+x}$ au point 0.
3. Trouver le développement limité d'ordre 2 de $x \rightarrow \ln(1+e^x)$ au point 0.

9.2 Calculer le développement limité à l'ordre 4, en 0, de chacune des fonctions définies ci-dessous, par :

$$f(x) = \operatorname{ch} 2x \operatorname{sh} 3x, \quad g(x) = (\ln(x+1))^2, \quad h(x) = \sqrt{1+\sin x}, \quad i(x) = e^{\sin x}, \quad j(x) = e^{\cos x}, \quad k(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

9.3 Calculer le développement limité à l'ordre 4, en 0, de l'application f définie ci-dessous, par :

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \text{ pour } x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}.$$

9.4 Calculer le développement limité à l'ordre 2, en 0, de l'application f définie ci-dessous, par :

$$f(x) = \frac{\ln(1-2\sin x)}{\operatorname{sh}(2x)} \text{ pour } x \in]-\pi/6, \pi/6[\setminus \{0\}.$$

En déduire que f possède une limite en 0 que l'on précisera.

9.5 Calculer le développement limité à l'ordre 4, en 1, de chacune des fonctions définies ci-dessous, par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}, \quad g(x) = x^x, \quad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

9.6 Calculer le développement limité à l'ordre 3, en $\pi/2$, de l'application f définie ci-dessous, par :

$$f(x) = \ln(\sin x) \text{ pour } x \in [-\pi/4, 3\pi/4].$$

9.7 Calculer le développement limité à l'ordre 3, en $\pi/4$, de l'application f définie ci-dessous, par :

$$f(x) = \ln(\tan x) \text{ pour } x \in]0, \pi/2[.$$

9.8 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin^2 x}{x^3 \ln(1+x)}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^x)(1 - \cos x)}{x^3 + x^4}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}{x(2+x)}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{\arctan^2 x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x \right), & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x)^x \end{aligned}$$

9.9 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{ch} x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{x^2+1})}{e^x}.$$

9.10 En utilisant des développements limités à l'ordre 5, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sh}(x) - \sin(x) - \tan(x)}{x(\operatorname{ch}(x) - \cos(x) - \ln(1+x^2))}.$$

9.11

1. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0. Déterminer son développement limité à l'ordre 1, en 0.

2. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 mais cependant que f admet un développement limité à l'ordre 2, relatif à 0, que l'on déterminera.

9.12 Montrer que la fonction suivante a un développement limité d'ordre 2 au point 0 sans être deux fois dérivable en 0 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x + x^2 + x^3 \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9.13 Etudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

On déterminera les droites asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que leurs positions relatives avec le graphe de f . On tracera ensuite le graphe de f .

9.14 Déterminer la position relative des graphes des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$f_1(x) = x\sqrt{1 - \frac{2}{3}x^2}; \quad f_2(x) = \arctan x.$$

9.15 Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^9 + x^8 + x^2 + 1}.$$

Montrer que la courbe C de la fonction f est asymptotique, lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, à la courbe Γ d'une fonction g polynomiale (c'est-à-dire $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$). Préciser les positions relatives de C et Γ pour $|x|$ assez grand.