TD de Mathématiques Fiche n° 4.

Changement de base - Matrices semblables

4.1 Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $e'_1 = e_1 + 3e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Démontrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage P de la base e vers la base e'.
3. Quelle est la matrice de passage de la base e' vers la base e ?

4.2 Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de R^3. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On note $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ les coordonnées de x dans la base e. On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'_1 & = & x_2 + x_3 \\ x'_2 & = & x_1 + x_3 \\ x'_3 & = & x_1 + x_2 \end{array} \right. \qquad (S)$$

1. Démontrer que le système (S) défini un changement de coordonnée.
2. Quelle est la base déterminée par ce système ? (ie la base $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que les coordonnées de x dans la base e' sont $X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$.)

4.3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Démontrer qu'il existe une base $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base e' est
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$
2. Quelle est la matrice de passage P de la base e vers la base e' ?
3. Que vaut $P^{-1}AP$?

4.4 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.5 Soit $e = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme $u = e_1 + e_2$ en $2u$ et $v = -e_1 + 2e_2$ en $-v$. Déterminer la matrice de f dans la base e.

4.6 Soit f un endomorphisme inversible de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $e = (e_1, \dots, e_n)$. Soit e' la base de R^n telle que la matrice de passage de e vers e' est A. Quelle est la matrice de f dans la base e' ?

4.7

1. Démontrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors pour tout entier naturel n, les matrices A^n et B^n sont semblables.
2. Les deux matrices A et B définies ci-dessous sont-elles semblables ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.8 Montrer que les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{bmatrix}$ sont semblables et déterminer toutes les matrices de passages.

4.9 On définit l'application

$$T : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Démontrer que T est linéaire.
2. Démontrer que $T(AB) = T(BA)$.
3. Démontrer que si A est semblable à B alors $T(A) = T(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
4. Existe-t-il 4 matrices 2×2 A, B, C et D telles que

$$\begin{cases} AC + DB = & I \\ CA + BD = & 0 \end{cases} ?$$

4.10 On définit

$$S : \ M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} a_{ji}.$$

1. Démontrer que si A et B sont semblables, alors $S(A) = S(B)$. (*Indication : on pourra montrer que $S(AB) = S(BA)$.*)
2. Les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$ sont-elles semblables ?

4.11 *Le but de cet exercice est déterminer de deux manières l'expression en fonction de n de la suite de Fibonacci*[1].

<u>Première méthode :</u> Soit $S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ et } u_0, u_1 \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que S est un espace-vectoriel de dimension 2.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$ une suite géométrique de raison $r \neq 0$. Montrer que $r^2 - r - 1 = 0$.
3. En déduire une base de S formée de suites géométriques.

[1]On rappelle que la suite de Fibonacci est la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

4. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

<u>Deuxième méthode :</u> Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que $X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
2. En déduire l'expression de X_n en fonction de A^n et X_0.
3. Soit $B = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$. Démontrer que les matrices A et B sont semblables[2].
4. Exprimer A^n en fonction de B^n.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4.12 Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -18 & 9 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 14 & -6 \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que A est semblable à $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Démontrer qu'il est possible de choisir la matrice de passage P (vérifiant $B = P^{-1}AP$) avec des zéros sur la diagonale.
2. On considère le système différentielle linéaire

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x_1'(t) &= 4x_1(t) - 18x_2(t) + 9x_3(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 5x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= -3x_1(t) + 14x_2(t) - 6x_3(t) \end{cases} \qquad (S).$$

   a. On note $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ et $X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix}$ le vecteur constitué des dérivées des x_i. Démontrer que le système (S) s'écrit matriciellement $X'(t) = AX(t)$.

   b. On pose $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ telle que $PY(t) = X(t)$. Démontrer que $Y'(t) = PX'(t)$.

   c. Résoudre le système $Y'(t) = BY(t)$.

   d. En déduire les solutions de (S).

[2] On verra dans le chapitre sur la diagonalisation des matrices d'où vient la matrice B (qui semble apparaître ici de façon complêtement miraculeuse).