Matrices

3.1 On considère dans $M_2(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer les matrices AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$.

3.2 Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ d'inconnue $X \in M_2(\mathbb{R})$.

3.3 Trouver toutes les matrices $X \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $X^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3.4 Soit A la matrice carrée de taille n ayant des 0 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et de la matrice identité I.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3.5 Dans $M_2(\mathbb{C})$, trouver toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

3.6 Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$(x, y) \mapsto (x + y + z, 2x + z, x + 3y).$$

1. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

3.7 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. En déduire que $f_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $f_2 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$ et $f_3 = 3e_1 + e_2 + e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base (f_1, f_2, f_3).

3.8 Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\varphi : E \longrightarrow E, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a+b & d-c \\ c-d & 3a \end{bmatrix}.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de E.
3. L'application φ est-elle injective ?

3.9 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. En déduire qu'il existe une infinité de bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de f est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.10 Trouver en fonction du réel a le rang de la matrice $M(a) \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$M(a) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & a \\ a & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

3.11 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

3.12 Calculer l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.13 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer le rang de la matrice de taille n :

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

(Indication : on pourra chercher le noyau de $M_{a,b}$).

3.14 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ on a $(XA)^2 = 0$. Démontrer que $A = 0$.

3.15 Soit n un entier non nul. On note S_n et A_n les sous-ensembles de $M_n(K)$ des matrices symétriques et antisymétriques respectivement.

1. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(K)$. Déterminer les dimensions de ces espaces.
2. Montrer que $M_n(K)$ est somme directe de S_n et A_n.

3.16 Soit E l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ du type

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, stable pour la multiplication des matrices. Quelle est sa dimension ?
2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{C}$ dans E définie pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, par $\phi(z) = M_{a,b}$. Montrer que ϕ est bijective et que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\phi(z + z') = \phi(z) + \phi(z')$ et $\phi(zz') = \phi(z)\phi(z')$. En déduire que E est un corps.

3.17 Caractériser les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ayant pour noyau et pour image le même sous-espace.

3.18 Trouver toutes les matrices $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{bmatrix}.$$