Algèbre linéaire

Exercice 56
Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?

1) L'ensemble D_1 engendré par le vecteur $(2,3)$.

2) L'ensemble $D_2 = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 0 \}$.

3) L'ensemble $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 1 \}$.

4) L'ensemble $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0 \}$.

5) L'ensemble $D_5 = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$.

6) L'ensemble $D_6 = \{ (\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R} \}$.

7) L'ensemble $D_7 = \{ (x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \}$.

8) L'ensemble $D_8 = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0 \}$.

Exercice 57
Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

1) L'ensemble $E_1 = \{ (\alpha, \beta, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R} \}$.

2) L'ensemble $E_2 = \{ (x,y,z) \mid xy + yz + z + x = 0 \}$.

3) L'ensemble $E_3 = \{ (x,y,z) \mid x + y + z = 0 \}$.

4) L'ensemble $E_4 = \{ (x,y,z) \mid x + y + z = 1 \}$.

5) L'ensemble $E_5 = \{ (x,y,z) \mid \sin x + \sin y + \sin z = 0 \}$.

Exercice 58

1) a) Soit x un réel. Discuter selon la valeur de x de ce que vaut le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x)$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ engendré par x.

   b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}$.

2) a) Soit (a,b) et (c,d) deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout λ réel, on ait $(a,b) \neq \lambda(c,d)$ et $(c,d) \neq \lambda(a,b)$).
   Montrer que le sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace $\mathbf{R}^2$ engendré par (a,b) et (c,d) est égal à $\mathbf{R}^2$.

   b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 59
On pose $u = (1,4,3), v = (0,2,1)$ et $w = (3,1,-1)$.

1) Montrer que (u,v,w) est libre dans $\mathbf{R}^3$.

2) Montrer que (u,v,w) est un système générateur de $\mathbf{R}^3$ (sans utiliser la théorie de la dimension).

Exercice 60
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs :
$$u = (1,-1,1),\ v = (0,-1,2),\ w = (1,-2,3).$$

1) La famille (u,v,w) est-elle libre ?

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w). Donner une base de F.

3) Soit $G = \{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 61
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$$v_1 = (1,2,0,1),\ v_2 = (1,0,2,1),\quad v_3 = (2,0,4,2),$$
$$w_1 = (1,2,1,0),\ w_2 = (-1,1,1,1),\ w_3 = (2,-1,0,1),\ w_4 = (2,2,2,2).$$

1) Démontrer que les familles (v_1, v_2) et (w_1, w_2, w_3) sont libres.

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_1, v_2, v_3). Déterminer une base de F.

3) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.

Exercice 62
Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $E_1 = \{(x_{,1}, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $E_2 = \{(x_{,1}, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_2 - x_3 = 0\}$, et enfin $E_3 = \{(x_{,1}, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_2 - x_3 = 0\}$.

2) $F_1 = \{(x_{,1}, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$, $F_2 = \{(x_{,1}, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\}$ et enfin $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 63
Dans ce qui suit, on note (x_1, x_2, x_3) un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$.
On appelle :
F_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.
F_2 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $a = (3, 0, 1)$, $b = (2, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 1)$.
F_3 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

F_4 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

F_5 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $b = (2, 1, 1)$ et $d = (0, 1, 0)$.

1) Déterminer des bases respectives des cinq espaces F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2) Pour chacune des inclusions énumérées ci-dessus, dites (et justifiez) si elle est vraie ou non :

a) $F_1 \subset F_2$?	b) $F_2 \subset F_1$?	c) $F_3 \subset F_5$?	d) $F_5 \subset F_3$?
e) $F_3 \subset F_1$?	f) $F_1 \subset F_3$?	g) $F_3 \subset F_4$?	h) $F_4 \subset F_3$?

Exercice 64
Le vecteur $(1, 2, 3)$ est-il ou non dans le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille suivante :

$$((1, 1, 1), (-2, 1, 7), (1, -1, 5), (2, 1, -1))\,?$$

Exercice 65
On note $\underline{can}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, et $\underline{e}$ le triplet (e_1, e_2, e_3) où

$$e_1 = (1, 2, 0), \qquad e_2 = (1, 1, 1), \qquad e_3 = (-1, 0, -3).$$

1) Montrer que $\underline{e}$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

2) Soit x le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Expliciter la matrice de x dans $\underline{can}$.

3) Soit y le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans $\underline{can}$. Expliciter la matrice de y dans $\underline{e}$.

Exercice 66
1) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même $\mathbf{R}^n$ peut ne pas être un espace vectoriel.

2) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbf{R}^n$, tels que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.
Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.