Université Lyon 1
Année Académique 2006/2007

MATH 1 Algèbre
Nombres complexes

Exercice 1
1) Calculer les racines deuxièmes des nombres complexes

$$a)\ z_1 = 7 + 24i, \quad b)\ z_2 = 9 + 40i, \quad c)\ z_3 = 1 + i.$$

2) Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes:

$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \quad b)\ z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes

$$\begin{array}{llll} a) & iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0, & b) & 2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0 \\ c) & z^2 - (3+4i)z + 7i - 1 = 0, & d) & z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i = 0 \\ e) & z^2 - 2\overline{z} = 0 & & \end{array}$$

Exercice 3.
Montrer que tout nombre complexe $z \neq 1$ de module 1 s'écrit sous la forme $\frac{x+i}{x-i}$, $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 4.
Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 5.
Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

En déduire la valeur de $cos\,\frac{\pi}{8}$ et de $sin\,\frac{\pi}{8}$.

Exercice 6.
1) Déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. (Utiliser la formule de Moivre.)
En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 7.
- Calculer $cos\,3\theta$ (resp. $sin\,3\theta$) en fonction de $cos\,\theta$ (resp. de $sin\,\theta$.)
- En utilisant la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbf{C},$$

exprimer $cos\,n\theta$ et $sin\,n\theta$ en fonction de $cos\,\theta$ et $sin\,\theta$.

[$cos\, n\theta$ s'exprime suivant un polynôme en $cos\,\theta$ tandis que $sin\, n\theta$ est le produit de $sin\,\theta$ par un polynôme en $cos\,\theta$.]

Exercice 8.
Soient $n \in \mathbf{N}^\star$, $\theta \in \mathbf{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} cos(k\theta), \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} sin(k\theta).$$

Exercice 9.
Soit $z = e^{i\theta}$. On a

$$2cos\theta = z + 1/z, \quad 2isin\theta = z - 1/z.$$

En développant à l'aide de la formule du binôme, on peut alors linéariser les polynômes trigonométriques $cos^p\theta = (z+1/z)^p$, $(2i)^p sin^p\theta = (z-1/z)^p$, ainsi que $cos^p\,\theta\, sin^q\,\theta$.
- Linéariser les polynômes trigonométriques suivants $cos^5\,\theta$, $cos^4\theta sin^2\theta$.

Exercice 10.
Pour rappel: - Soient $z \in \mathbf{C}^\star$ et $n \in \mathbf{N}^\star$. Il existe exactement n nombres complexes w vérifiant $w^n = z$. Ces nombres sont appelés les n racines $n-$ième de z.
1) Représenter dans le plan complexe $\mathbf{C}$ les 6 racines $6-$ ième de 1 et les 4 racines $4-$ ième de -1.
2) Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ racines du polynôme complexe $1 + z + \cdots + z^{n-1}$.

Exercice 11. (Construction du pentagone régulier.)
Soit $s = cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5}$ et $p = cos\frac{2\pi}{5}\, cos\frac{4\pi}{5}$.
1) Montrer que $s = -\frac{1}{2}$, $p = -\frac{1}{4}$ et dès lors que s et p sont racines de $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$
2)* En déduire une construction à la règle et au compas des cinq sommets du pentagone régulier.

Exercice 12.
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes:

$$\begin{array}{ll} a) \quad z^5 - z = 0, & b) \quad 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \\ c) \quad \overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}, & d) \quad z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0. \end{array}$$

Exercice 13.
Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation suivante:

$$x^3 + (1-3i)x^2 - (6-i)x + 10i = 0.$$

Exercice 14.
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que

$$\begin{array}{llll} a) \quad \mid 1 - z \mid \leq \dfrac{1}{2}, & b) \quad Re(1-z) \leq \dfrac{1}{2} & c) \quad Re(iz) \leq \dfrac{1}{2} \\ d) \quad \mid 1 - \dfrac{1}{z} \mid^2 = 2, & e) \quad \mid \dfrac{z-3}{z+3} \mid = 2, & f) \quad \mid \dfrac{z-3}{z+3} \mid < 2 \end{array}$$

Exercice 15.
Montrer que
$$\forall z, w \in \mathbf{C},\ \mid z+w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid .$$
- En déduire que
$$\forall z, w \in \mathbf{C},\ \mid\mid z \mid - \mid w \mid\mid \leq \mid z+w \mid .$$

Exercice 16.
Soient $z, w \in \mathbf{C}$. Etablir la relation
$$\mid z+w \mid^2 + \mid z-w \mid^2 = 2(\mid z \mid^2 + \mid w \mid^2)$$
et donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 17.
Soient u, v, w trois nombres complexes de module 1. Etablir la relation
$$\mid uv+vw+wu \mid = \mid u+v+w \mid .$$

Exercice 18.
Soit $c \in \mathbf{C}$ avec $\mid c \mid < 1$.
1) Montrer que $\mid z+c \mid \leq \mid 1+\overline{c}z \mid$ si et seulement si $\mid z \mid \leq 1$.
Soient $D = \{z \in \mathbf{C},\ \mid z \mid \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbf{C},\ \mid z \mid = 1\}$ le cercle unité.
2) Montrer que l'application
$$f : D \longrightarrow D : z \mapsto \frac{z+c}{1+\overline{c}z},$$
est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.