Ensembles proprement dits

Exercice 1
Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Combien d'éléments ont respectivement $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \times B$?

Exercice 2
On note $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n^2 \text{ est pair}\}$ et $B = \{n \in \mathbf{N} \mid n^2 \text{ est impair}\}$.
Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3

1) Déterminer $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

2) Soit $a \neq b$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ pour $E = \{a\}$ puis pour $E = \{a, b\}$.

Exercice 4
Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1) $F \subset G \iff F \cup G = G$;

2) $F \subset G \iff F \cap C_E G = \emptyset$.

Exercice 5
Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Que pensez-vous de l'implication :

$$A \cup B \not\subset C \Rightarrow (A \not\subset C \quad \text{ou} \quad \text{B} \not\subset \text{C})?$$

(On pourra utiliser la contraposée).

2) On suppose que les deux inclusions suivantes sont vraies : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.
Montrer que $B \subset C$.

Exercice 6
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cup B \neq E, \quad A \not\subset B \quad \text{et} \quad B \not\subset A.$$

On pose :

$$A_1 = A \cap B, \quad A_2 = A \cap C_E B, \quad A_3 = B \cap C_E A \quad \text{et} \quad A_4 = C_E(A \cup B).$$

1) Montrer que les ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 ne sont pas vides.

2) Montrer que les ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.

3) Montrer que ces ensembles forment une partition de E.

Exercice 7
Soit A et B deux ensembles. On considère l'équation

$$A \cap X = B$$

où l'inconnue est un ensemble X. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que cette équation admette au moins une solution.

Exercice 8
Montrer que pour tous a, b, c et d :

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c \text{ et } b = d.$$

Exercice 9
Pour A et B deux ensembles, on note $A \triangle B$ le complémentaire dans $A \cup B$ de $A \cap B$.

1) Soit X un ensemble fixé ; pour $D \subset X$, on note $\overline{D}$ le complémentaire de D dans X.

Montrer que pour toutes parties A et B de X, $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$.

2) L'objectif de la question est de montrer que pour tous ensembles A, B et C, on a :

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

a) (Première méthode, brutale)
Discuter, en faisant huit cas, selon que $x \in A$, $x \notin B$, $x \in C$ et autres cas analogues, si x appartient ou non à $(A \triangle B) \triangle C$ et à $A \triangle (B \triangle C)$. Conclure que les cas d'appartenance sont exactement les mêmes.

b) (Deuxième méthode, plus astucieuse)
On introduit un ensemble X contenant à la fois A, B et C (par exemple leur réunion). Pour toute partie D de X, on note χ_D l'application de X vers $\mathbf{N}$ définie par : pour tout $x \in X$, $\chi_D(x) = 0$ si $x \notin D$ et $\chi_D(x) = 1$ si $x \in D$.
Montrer que pour toutes parties D et E de X,

$$(\chi_D + \chi_E - \chi_{D \triangle E})(X) \subset \{0, 2\}.$$

En déduire que $\chi_{(A \triangle B) \triangle C} - \chi_{A \triangle (B \triangle C)}$ ne prend que des valeurs paires.
Conclure.

Exercice 10
Soit A et B deux ensembles. Montrer que

$$A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$