Calcul différentiel - Correction

Exercice 1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= y^2 & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= 2xy \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= 3y & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &= 3x + e^y \\
\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) &= 2y^2\cos(2xy+1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) &= \sin(2xy+1) + 2xy\cos(2xy+1) \\
\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) &= \big(2\cos(2x)+y\big)e^{\sin(2x)+xy} & \frac{\partial f_4}{\partial y}(x,y) &= xe^{\sin(2x)+xy} \\
\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+\cos(y)+1}} & \frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) &= \frac{-\sin(y)}{2\sqrt{x^2+\cos(y)+1}} \\
\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) &= \frac{2}{x} & \frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) &= \frac{2}{y}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On rappelle que l'équation cartésienne d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est de la forme $ax+by+cz=d$ (avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ des constantes), et que dans ce cas le vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ est orthogonal au plan. Dans les cas qui nous intéressent on a $\pi_1 : y = 1$ et $\pi_2 : x = 1$.
Commençons par décrire mathématiquement la courbe γ_1 :

$$\gamma_1 = S \cap \pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| z = 3x^2+4y^2-6 \text{ et } y=1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| z = 3x^2-2 \text{ et } y=1\}\,,$$

donc γ_1 est le graphe de la fonction $f(x) = 3x^2-2$ dans le plan π_1 parallèle à xOz. Donc la pente de γ_1 est donnée par la dérivée $f'(x) = 6x$ de f.
De la même manière

$$\gamma_2 = S \cap \pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| z = 3x^2+4y^2-6 \text{ et } x=1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| z = 4y^2-3\}\,,$$

et γ_2 est donc le graphe de la fonction $g(y) = 3y^2-3$ dans le plan π_2 parallèle à yOz. Ainsi la pente de γ_2 est donnée par a dérivée $g'(y) = 8y$ de g.

2. La fonction f définie par $f(x,y) = 3x^2+4y^2-6$ a pour graphe la surface $S \subset \mathbb{R}^3$. Ses dérivées partielles au point $(x_0,y_0) = (1,1)$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 6x_0 = 6 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 8y_0 = 8\,.$$

Elles correspondent respectivement avec les pentes des courbes γ_1, en $x=1$, et γ_2, en $y=1$.

Exercice 3

On rappelle que le gadient $\vec{\nabla}(f)_{(x_0,y_0)}$ d'une fontion f de deux variables x et y en un point (x_0,y_0) est le vecteur suivant :

$$\vec{\nabla}(f)_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j}\,.$$

Ainsi on a (on ne donne la correction que pour $(0,0)$ et $(1,-1)$),

$$\begin{array}{ll}
\vec{\nabla}(f_1)(0,0)=\vec{0} & \vec{\nabla}(f_1)(1,-1)=\vec{\imath}-2\vec{\jmath} \\
\vec{\nabla}(f_2)(0,0)=\vec{\jmath} & \vec{\nabla}(f_2)(1,-1)=-3\vec{\imath}+(3+e^{-1})\vec{\jmath} \\
\vec{\nabla}(f_3)(0,0)=\sin(1)\vec{\jmath} & \vec{\nabla}(f_3)(1,-1)=2\cos(1)\vec{\imath}-\big(\sin(1)+2\cos(1)\big)\vec{\jmath} \\
\vec{\nabla}(f_4)(0,0)=2\vec{\imath} & \vec{\nabla}(f_4)(1,-1)=\big(2\cos(2)-1\big)e^{\sin(2)-1}\vec{\imath}+e^{\sin(2)-1}\vec{\jmath} \\
\vec{\nabla}(f_5)(0,0)=\vec{0} & \vec{\nabla}(f_5)(1,-1)=\frac{1}{\sqrt{2+\cos(1)}}\vec{\imath}+\frac{\sin(1)}{\sqrt{2+\cos(1)}}\vec{\jmath} \\
\vec{\nabla}(f_6)(0,0) \text{ n'existe pas} & \vec{\nabla}(f_6)(1,-1)=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}
\end{array}$$

Exercice 4

On rappelle que la dérivée directionnelle de f suivant un vecteur $\vec{V}$ se calcule *via* le produit scalaire de $\vec{V}$ avec le gradient de f :

$$\partial_{\vec{V}} f(x,y)=\vec{\nabla}(f)_{(x,y)}\cdot\vec{V}\,.$$

Ici on a $f(x,y)=xy^2$. Ainsi $\nabla(f)_{(x,y)}=y^2\vec{\imath}+2xy\vec{\jmath}$, et au point $(2,1)$ on a $\nabla(f)_{(x,y)}=\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$. Alors

$$\partial_{\vec{u}} f(2,1)=1+4=5\,,\quad \partial_{\vec{v}} f(2,1)=1-2(4)=-7\,,\ \text{et}\quad \partial_{\vec{w}} f(2,1)=2-4=-2\,.$$

Exercice 5

1. $\vec{\nabla}(f)_{(x,y)}=2x+8y$.

2. Soit $k\geq 0$ un nombre réel positif fixé. Alors la ligne L_k de niveau k de la fonction f est la courbe du plan déquation $x^2+4y^2=k$. Autrement dit, L_k est l'ellipse d'équation centrée en 0, de grand axe Ox, de grand rayon $\sqrt{k}$ et de petit rayon $\sqrt{k}/2$.

3. La courbe γ est précisément la ligne de niveau L_4, donc le gradient de f lui est orthogonale.

Exercice 6

Soit Γ_f le graphe de la fonction $f(x,y)=xy^2$. Commençons par donner deux vecteurs tangents, $\vec{v_1}(x,y)$ et $\vec{v_2}(x,y)$, à Γ_f en un point (x,y,z) du graphe (on a $z=f(x,y)$) :

$$\vec{v_1}(x,y)=(1,0,\frac{\partial f}{\partial x})=(1,0,y^2)\qquad\text{et}\qquad \vec{v_2}(x,y)=(0,1,\frac{\partial f}{\partial y})=(0,1,2xy)\,.$$

Ainsi, si $(x,y)=(2,1)$ (on ne corrigera pas le cas $(0,0)$, qui est très facile, ici) on trouve que une équation paramaétrique du plan tangent à Γ_f au point (x,y,z) :

$$\vec{v_1}(2,1)=(1,0,1)\qquad\text{et}\qquad \vec{v_2}(2,1)=(0,1,4)\,.$$

Par conséquent on trouve une équation paramétrique du plan tangent au point $(2,1,2)$ ($f(2,1)=2$) :

$$x=2+\alpha\,,\quad y=1+\beta\,,\quad z=2+\alpha+4\beta\qquad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})\,.$$

Pour trouver un équation cartésienne on a besoin d'un vecteur orthogonal, par exemple le produit vectoriel de deux vecteurs tangents : $\vec{v_1}(2,1)\wedge\vec{v_2}(2,1)=(-1,-4,1)$. Par conséquent on trouve une équation cartésienne du plan tangent au point $(2,1,2)$: $-1(x-2)-4(y-1)+1(z-2)=0$. Autrement dit, $x+4y-z=4$.

Exercice 7

Commençons par rappeler que la différentielle d'une fonction f de deux variables en un point (x,y), notée $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ ou $\mathrm{d}_{(x,y)}f$, est définie par

$$\mathrm{d}f_{(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\,.$$

Ainsi, il suffit de calculer les d{erivées partielle de la fonction. Dans les exemples de l'exercice on trouve

$$\mathrm{d}f_{(x,y)} = (3x^2y+2xy^2+y^3)\mathrm{d}x+(x^3+2x^2y+3xy^2)\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \mathrm{d}g_{(x,y)} = (\sin y - y\cos x)\mathrm{d}x+(x\cos y - \sin x)\mathrm{d}y\,.$$

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. En notant $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient que $F = f \circ r$. Commençons par calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Calculons maintenant la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial r}\Big)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)^2 + \frac{\partial f}{\partial r}\Big(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\Big)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big(\frac{x^2}{x^2+y^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial r}\Big(\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big)\,.
\end{aligned}$$

On trouve exactement de la même manière que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^y} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big(\frac{y^2}{x^2+y^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial r}\Big(\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big)\,.$$

Ainsi, le Laplacien de F vaut

$$\Delta(F) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial r}\Big(\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\,.$$

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\quad &\to \quad \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\\
(r,\theta) \quad &\mapsto \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)\,.
\end{aligned}$$

On pose alors $F = f \circ \phi$ et on cherche à calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f. Dans les calculs qui suivent, on utilise la notation "physicienne" et on ne fait pas la différence entre f et F (les deux étant notées f), considérant qu'il s'agit de la **même** fonction exprimée dans des coordonnées différentes :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial F}{\partial r} =\Big)\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)\\
\Big(\frac{\partial F}{\partial \theta} =\Big)\frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin(\theta)) + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos(\theta)
\end{aligned}$$

En écriture matricielle on a

$$\begin{pmatrix}\partial f/\partial r\\ \partial f/\partial \theta\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\ \partial f/\partial y\end{pmatrix}.$$

Pour calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de F il suffit de calculer l'inverse de la matrice A :

$$\begin{pmatrix}\partial f/\partial x\\ \partial f/\partial y\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\partial f/\partial r\\ \partial f/\partial\theta\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta/r\\ \sin\theta & \cos\theta/r\end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\cos(\theta)}_{=\partial r/\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\underbrace{\left(-\frac{\sin(\theta)}{r}\right)}_{=\partial\theta/\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\sin(\theta)}_{=\partial r/\partial y} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\underbrace{\frac{\cos(\theta)}{r}}_{=\partial\theta/\partial y}.$$

Ainsi le gradient s'exprime en coordonnées polaires de la manière suivante :

$$\vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}(\underbrace{\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}}_{=\vec{u}_r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}(\underbrace{-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}}_{=\vec{u}_\theta}).$$

Autrement dit,

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} = \vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{u}_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

On remarque ensuite que le Laplacien peut s'exprimer comme un produit scalaire :

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}(f)).$$

Enfin, on rappelle que $\partial\vec{u}_r/\partial r = \partial\vec{u}_\theta/\partial r = 0$, $\partial\vec{u}_r/\partial\theta = \vec{u}_\theta$, $\partial\vec{u}_\theta/\partial\theta = -\vec{u}_r$, $\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta = 0$ et $\vec{u}_r\cdot\vec{u}_r = 1 = \vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta$. Ainsi on peut terminer le calcul du Laplacien en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta\right)\\
&= \vec{u}_r\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\vec{u}_r - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\vec{u}_\theta\right)\\
&\quad + \frac{1}{r}\vec{u}_\theta\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial r}\vec{u}_r + \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\vec{u}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_r\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}$$