Relations
Exercices ne dépassant pas le programme de Maths I

Exercice 1
Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$.
Sur X on considère la relation dont le graphe est l'ensemble G suivant :

$$G = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}.$$

Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

Exercice 2
Soit P^* l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère sur cet ensemble P^* la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$p \,\mathcal{R}\, q \iff \frac{p+q}{2} \in P^*.$$

Cette relation est-elle réflexive, symétrique, transitive ?

Exercice 3

1) Donner un exemple de relation à la fois symétrique et antisymétrique.

2) Soit E un ensemble fini ayant n éléments. Combien y a-t-il de relations sur E qui soient à la fois symétriques et antisymétriques ?

Exercice 4
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{R}$ en posant, pour tous réels x et y :

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Quel est le graphe de $\mathcal{R}$?

3) Déterminer les classes d'équivalence des réels 0, 1, $\frac{1}{2}$.

Exercice 5
On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est **circulaire** lorque pour tous a, b et c de X :

$$(a \,\mathcal{R}\, b \text{ et } b \,\mathcal{R}\, c) \Rightarrow c \,\mathcal{R}\, a.$$

1) Montrer qu'une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et circulaire.

2) Donner un exemple de relation circulaire qui ne soit pas une relation d'équivalence.

Exercice 6
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{N}^2$ en posant, pour tous entiers naturels a, b, c et d :

$$(a, b) \,\mathcal{R}\, (c, d) \iff a + d = b + c.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer les classes d'équivalence respectives de $(0, 0)$, de $(3, 1)$, de $(2, 4)$.

3) Décrire l'ensemble-quotient $\mathbf{N}^2/\mathcal{R}$.

Exercice 7
Sur $\mathbf{R}^2$, on définit $\mathcal{E}$ par :
$(x, y) \;\mathcal{E}\; (x', y')$ lorsque $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
Montrer que $\mathcal{E}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^2$. Décrire la partition de $\mathbf{R}^2$ par les classes d'équivalence pour $\mathcal{E}$.

Exercice 8
Sur $\mathbf{R}^2$ on définit une relation $\mathcal{R}$ en posant, pour tous x, y, x', y' réels :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff x + y = x' + y'.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Décrire la classe d'équivalence de $(0, 0)$, puis toutes les classes d'équivalences.

3) Soit f l'application définie sur l'ensemble-quotient $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ par la formule :

$$f\left(\dot{(x, y)}\right) = x + y.$$

Justifier que cette définition est sensée, puis montrer que f est bijective.

Exercice 9
Soit E un ensemble.
Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ on définit une relation $\mathcal{R}$ en posant, pour tous A, B inclus dans E :

$$A \mathcal{R} B \iff ((A = B) \text{ ou } (A \text{ est le complémentaire de } B \text{ dans } E)).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 10
On définit dans $\mathbf{N}^*$ une relation $\ll$ en posant, pour tous x, y de $\mathbf{N}^*$:

$$x \ll y \iff \exists n \in \mathbf{N}^*,\ y = x^n.$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}^*$.

Exercice 11
Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
Soit $\mathcal{S}$ une relation sur F. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E en posant, pour tous éléments x, y de E :

$$x \mathcal{R} y \iff f(x) \mathcal{S} f(y).$$

1) Montrer que si $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence, alors $\mathcal{R}$ aussi.

2) Montrer que si $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre et f est injective, alors $\mathcal{R}$ est aussi une relation d'ordre.

Exercice 12
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation réflexive et transitive sur E.
1) Montrer que la relation $\mathcal{E}$ définie sur E par :

$$a \mathcal{E} b \qquad \Leftrightarrow \qquad (a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} a)$$

est une relation d'équivalence.

2) Soit Q l'ensemble-quotient $E/\mathcal{E}$; sur Q on définit une relation $\ll$ par :

$$A \ll B \qquad \text{lorsqu'il existe } a \in A \text{ et } b \in B \text{ tels que } a \mathcal{R} b.$$

Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre sur Q.

Exercice 13
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant, pour tous ensembles X, Y éléments de $\mathcal{P}(E)$:

$$X \mathcal{R} Y \iff A \cap X = A \cap Y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

2) Expliciter les classes $\dot{\emptyset}$, $\dot{E}$ et $\dot{A}$.

3) Soit X un élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que si $B = A \cap X$, B est l'unique élément de $\dot{X}$ qui soit contenu dans A.

4) On définit une application f de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ vers $\mathcal{P}(A)$ en posant pour tout X inclus dans E :

$$f(\dot{X}) = A \cap X.$$

Pourquoi f est-elle bien une application ?
Montrer que f est bijective.

Exercices utilisant des mots pas au programme de Maths I

Exercice 14
Dans $\mathbf{N}^*$, on définit une relation $\ll$ en posant, pour tous m, n de $\mathbf{N}^*$:

$$m \ll n \qquad \text{lorsqu'il existe } k \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } n = km.$$

a - Montrer que $\ll$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbf{N}^*$. $\mathbf{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
b - Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pour $\ll$, A possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? des éléments maximaux ? des éléments minimaux ?
Lorque la réponse est "oui", précisez les.
c - Pour $\ll$, quels sont les éléments minimaux de $\mathbf{N}^*$?

Exercice 15
Soit E un ensemble ordonné par une relation notée $\leq$, supposée vérifier la propriété suivante : toute partie finie de E possède une borne inférieure et une borne supérieure.
Soit $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ une famille finie de mn éléments de E. Parmi les deux inégalités :

$$\sup_{1\leq j\leq n}\left(\inf_{1\leq i\leq m} x_{ij}\right) \leq \inf_{1\leq i\leq m}\left(\sup_{1\leq j\leq n} x_{ij}\right)$$

$$\inf_{1\leq i\leq m}\left(\sup_{1\leq j\leq n} x_{ij}\right) \leq \sup_{1\leq j\leq n}\left(\inf_{1\leq i\leq m} x_{ij}\right)$$

reconnaître celle qui est toujours vraie et la prouver.