Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

- TD 10 -

Feuille d'exercice IV.

– SOUS-ESPACE CARACTERISTIQUES – DECOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME –
– EXPONENTIELLE D'ENDOMORPHISME –

Exercice 8*. On reprend les matrices de la feuille d'exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u.

1.1. Calculer les π_λ de A.

1.1.1.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Sp=(2,3,4)

$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\chi_A(X)$=(X-2)(X-3)(X-4)

$(*)\ \frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{(X-2)} + \frac{b}{(X-3)} + \frac{c}{(X-4)}$

$(*) * (X-2)\ eval(2)\quad \frac{1}{(2-3)(2-4)} = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$(*) * (X-3)\ eval(3)\quad \frac{1}{(3-2)(3-4)} = b \Leftrightarrow b = -1$

$(*) * (X-4)\ eval(4)\quad \frac{1}{(4-2)(4-2)} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{a}{(X-2)} + \frac{b}{(X-3)} + \frac{c}{(X-4)}$

$\frac{1}{\chi_A(X)} = \frac{\frac{1}{2}}{(X-2)} + \frac{-1}{(X-3)} + \frac{\frac{1}{2}}{(X-4)}$

$1 = \frac{1}{2}(X-3)(X-4) - (X-2)(X-4) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$

$Id = \frac{1}{2}(u-3Id)(u-4Id) - (u-2Id)(u-4Id) + \frac{1}{2}(u-2Id)(u-3Id)$

$x = \frac{1}{2}(u-3Id)(u-4Id)(x) - (u-2Id)(u-4Id)(x) + \frac{1}{2}(u-2Id)(u-3Id)(x)$

$$(u-2Id)\frac{1}{2}(u-3Id)(u-4Id)(x) = 0$$

On est dans le cas diagonalisable.

$$E = Ker(u-2Id) \oplus Ker(u-3Id) \oplus Ker(u-4Id)$$

Commentaire [E1]: $\mathbb{K}[X]$

Commentaire [E2]: End(E)

Commentaire [E3]: $\in Ker(u-2Id)$

Commentaire [E4]: $\in Ker(u-3Id)$

Commentaire [E5]: $\in Ker(u-4Id)$

Commentaire [E6]: E

Commentaire [E7]: $\frac{1}{2}m_u(u)$

Commentaire [E8]: $E_2 = E^2$

Commentaire [E9]: $E_3 = E^3$

Commentaire [E10]: $E_4 = E^4$

$\pi_2 = \frac{1}{2}(u - 3Id)(u - 4Id)$
$\pi_3 = -(u - 2Id)(u - 4Id)$
$\pi_4 = -(u - 2Id)(u - 3Id)$

2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
   2.1. Calculer B_2.
      2.1.1.

$$B_2 = \frac{1}{2}(A - 3Id)(A - 4Id) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} 1 = rang\ B_2 = TrB_2 = projecteur\ {B_2}^2 = B_2$$

3. Exprimer, pour tout entier n≥0, l'endomorphisme u^n en fonction de u. Ecrire la matrice u^n, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   3.1. Ecrire u^n.
      3.1.1.

$$Id = \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$
$$u^n = u^n\pi_2 + u^n\pi_3 + u^n\pi_4$$
$$u^n = 2^n\pi_2 + 3^n\pi_3 + 4^n\pi_4$$
$$A^n = 2^nB_2 + 3^nB_3 + 4^nB_4$$

4. Exprimer, pour tout réel t, l'endomorphisme e^{tu} en fonction de u. Ecrire la matrice de u^n, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   4.1. Ecrire e^{tA}.
      4.1.1.

$$e^{tA} = e^{2t}B_2 + e^{3t}B_3 + e^{4t}B_4$$

5. Répondre aux mêmes questions avec les endomorphismes représentés par les matrices suivantes :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5.1. Avec la matrice B.

5.1.1.

- vp = (1,1,4)
- $m_u = (X-4)(X-1)$
- $(*)\ \frac{1}{(X-1)(X-4)} = \frac{a}{(X-1)} + \frac{b}{(X-4)}$

  $(*) * (X-1)\ eval(1) \quad \frac{1}{(1-4)} = a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

  $(*) * (X-4)\ eval(4) \quad \frac{1}{(4-1)} = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$
- $1 = \frac{1}{3}(\mathrm{X}-1) - \frac{1}{3}(\mathrm{X}-4)$

  $Id = \frac{1}{3}(\mathrm{u}-\mathrm{Id}) - \frac{1}{3}(\mathrm{u}-4\mathrm{Id})$

  $\pi_1 = \frac{1}{3}(\mathrm{u}-\mathrm{Id})$

  $\pi_2 = -\frac{1}{3}(u-4Id)$
- $B_1 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

  ${B_1}^2 = B_1$ $\qquad B_1$ est un projecteur, $rang\ B_1 = TrB_1 = \dim E^1 = \dim E_1$.
- $P\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & 0 & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)P^{-1}$

5.2. Avec la matrice C.

5.2.1.

- vp = (1,2,2)
- $m_u = (X-1)(X-2)^2$
- $(*)\ \frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{(X-1)} + \frac{bX+c}{(X-4)}$

  $(*) * (X-1)\ eval(1) \quad \frac{1}{(1-2)^2} = a \Leftrightarrow a = 1$

  $(*) * (X-2)^2 eval(2) \quad \frac{1}{(2-1)} = 1 = 2a + c \Leftrightarrow c = 3$

  $(*) * \ X \rightarrow +\infty \ a + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$
- $\pi_1 = (\mathrm{u}-2\mathrm{Id})^2$

  $\pi_2 = -(u-Id)(u-3Id)$
- $E = E^2 \oplus E^1 = E^2 \oplus E_1$

Commentaire [E11]: E_1

Remarque : $\exp\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix}$

Donc dans une base $Mat\ \pi_1 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad Mat\ \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$ dans une base compatible avec la décomposition.

$E = \underbrace{\underbrace{E^2}_{B^1} \oplus \underbrace{E^1}_{B^2}}_{B}$

- $e^u = e^u\pi_1 + e^u\pi_2$
  $e^u\pi_2 = exp(2Id + n_2)\pi_2 = \exp(2Id) * \exp(n_2) * \pi_2$
  $e^u\pi_1 = \exp(Id)\,\pi_1 = e\pi_1$
  donc $e^u\pi_2 = e^2 \exp(n_2)\,\pi_2$
  Reste à calculer $\exp(n_2)$
  $n_2^2 = 0$ $\exp(n_2)$=Id+n_2= Id + u -2 Id = u-Id
  Conclusion $e^u = e^2(u - Id)\pi_2 + e\pi_1$
- $C_0 = -\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
  $C_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  Etude de λ=2
  $E^2 = Im\,\pi_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$Mat_{u|_{E^2}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Vecteur propre.

u$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $est\ \ vecteur\ propre.$

$u^n = u^n\pi_1 + u^n\pi_2$

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

remarque : $B_1 + B_2 = Id$

une fois calculé B_1, B_2 est gratuite.

$u^n\pi_2 = (2Id + (u - 2Id)^2)\pi_2$ avec$(u - 2Id)^2$= 0 (voir polynôme minimal)

Binome de Newton car commutatif.

$2^n Id - 2^n nId$

$u^n\pi_2 = (2^n Id + 2^{n-1}n(u - 2Id))\pi_2$

$u^n\pi_2 = (2^n(1 - n) + 2^{n-1}u)\pi_2$

On peut calculer $u^n = u^n\pi_2$ +π_1= …

Calculer exp(u)

$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Commentaire [E12]: Car 2Id et n_2 commutent

$\sum_{n\geq 0}\frac{n2^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{(n-1)!} = 2\sum_{n\geq 0}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2\sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{k!} = 2e^2$

$u^n = (2^n(1-n)Id + 2^{n-1}u)\pi_2 + \pi_1$

$calulons$ exp(u) = $\sum_{n\geq 0}\frac{u^n}{n!}$

exp(u) = $(\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{n2^n}{n!})\pi_1 + \sum_{n\geq 0}\frac{2^{n-1}}{n!}u\pi_2 + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\pi_1$

exp(u) = $(e^2 2e^2)\ \pi_2$+$\frac{1}{2}(e^2-1)u\pi_2 + e^1\pi_1$

exp(u)= $(-e^2 + \frac{1}{2}(e^2-1)u\pi_2 + e\pi_1$=...)

Autre méthode:

$n_2\ = (u-2Id)$ $\qquad$ $u = (2Id + n_2)\pi_2 + \pi_1$

avec $n_2{}^2\pi_2 = 0.$