Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

TD 6
- Feuille d'exercice II.
- DIAGONALISATION – TRIGONALISATION -

$$Dim\ E_\lambda^u = 1$$
$$Dim\ E_\mu^v = 1$$
$$E_\lambda^u = E_\mu^v$$

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mu_u} & \\ 0 & & \mu_u \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \lambda_v & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mu_v} & \\ 0 & & \mu_v \end{pmatrix}$$

Exercice 16. On considère la matrice A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que **A** est diagonalisable et diagonaliser **A.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

$$M = \begin{pmatrix} N & -N \\ 2N & 4N \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rq:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1}AP = D$$
$$P = \begin{pmatrix} Id & Id \\ -Id & -2Id \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2Id & Id \\ -Id & -Id \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} N & -N \\ 2N & 4N \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2N & 0 \\ 0 & 3N \end{pmatrix}$$

Si N est diagonalisable alors M l'est aussi.
Si M est diagonalisable, alors N l'est aussi.

Rappel : Soit A une matrice carré. Alors il existe un polynôme annulateur qui divise tout les autres. Il est unique si on le suppose unitaire.

$$\mu_A\ vérifie\ p(A) = 0 \implies \mu_A | P.$$

Ex : Pour un projecteur X²-X Symétrie X²-1 rotation plane d'angle $\frac{2\pi}{n}$. : $X^n - 1$ $\deg(\chi_A = 2)$

Commentaire [p1]: Pas minimal

A = $\begin{pmatrix} cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$

$$X^2 - 2\,cos\,\frac{2\pi}{n}X + 1$$

Propriétés :

- L'ensemble des racines de μ_A est sp(A) (les valeurs propres)
- A est diagonalisable ssi ⇔ μ_A est scindé simple.

Comme corollaire, on a mieux

Cor : A est diagonalisable ⇔ A est annulé par un polynôme scindé simple (même pas besoin qu'il soit minimal)

Effectivement : Si A est diagonalisable alors A est annulé par μ_A qui est scindé simple.

Par 2 : Réciproquement, si P(A) = 0 avec P scindé simple alors μ_A | P (par définition de μ_A) et donc μ_A est diagonalisable.

Ex : amusant et instructif : $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$

Montrer que M est diagonalisable ⇔ A et A' le sont.

On remarque que M² =$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ 0 & A' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ 0 & A' \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A'^2 \end{pmatrix}$

$M^n = \begin{pmatrix} A^n & 0 \\ 0 & A'^n \end{pmatrix} \Longrightarrow P \epsilon \mathbb{K}[X], \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A') \end{pmatrix}$

M est diagonalisable.

$\Longrightarrow P(M) = 0 \; avec \; P \; scindé \; simple$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A') \end{pmatrix} = 0$

$\Longrightarrow P(A) = 0, \; P(A') = 0$ or P est scindé simple.

$\Longrightarrow A \; et \; A' \; sont \; diagonalisables$

Commentaire [p2]: Attention si dimA≠dimA' alors P(A)≠P(A')

En particulier, si $M_n = \begin{pmatrix} 2N & 0 \\ 0 & 3N \end{pmatrix} M \; diagonalisable \; \rightarrow \; N \; est \; diagonalisable.$

$A \; de \; polynôme \; minimale \; \mu_A.$

$A' \; de \; polynôme \; minimale \; \mu_A'.$

Trouver le polynôme minimal de $\mu = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$

Soit P(M) = 0 ⟹ $P(A) \; = \; 0 \; et \; P(A') = 0$

$\Longrightarrow \; \mu_A | P \; et \; \mu_{A'} | P$

⇔ PPCM($\mu_A, \mu_{A'}$) | P

$\Longrightarrow \; \mu_M = PPCM(\mu_A, \mu_{A'})$