Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

TD 8-

Feuille d'exercice IV.

– SOUS-ESPACE CARACTERISTIQUES – DECOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME –
– EXPONENTIELLE D'ENDOMORPHISME –

Réduction :

Méthodes : A diagonalisable ?

1. Valeurs propres :
   a. Polynômes caractéristique
   b. Valeurs propres évidente (somme des lignes rang)
   c. Polynôme annulateur Si P(A)= 0, sp(A) ⊂ Racines de P
2. Condition suffisante de diagonalisation :
   a. $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \qquad \forall \lambda \in Sp(A)$ (c'est nécessaire et suffisant)
   b. χ_A *scindé simple*
   c. P annulateur scindé simple
   (Ex : Résolution Ex 11 et 12 fiche III)
3. La condition ultime de diagonalisation :
   a. Le polynôme minimale scindé simple (c'est nécessaire et suffisant)
4. Relation entre réduction et arithmétique
   Le pgcd s'écrit avec une relation de Bézout
   $P \in K[X]\ \mu_A : polynôme\ minimal\ de\ A.$
   D : pgcd(P,μ_A) $D = UP + V\mu_A$.
   $D(A) = U(A)P(A)$

Exercice 10.* (voir fiche précédente)

$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \mu_B = ppcm(\mu_A, \mu'_A)$

On appelle μ = $ppcm(\mu_A, \mu'_A)$

- $\mu_B | M$?
  Comme μ_B est le polynôme minimal de B il suffit de montrer que μ annule B.
  Or μ annule car μ est multiple de μ_A.
  Idem pour A' !
  Donc μ annule $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} = B$
- μ$|\mu_B$
  comme μ = $ppcm(\mu_A, \mu'_A)$
  μ$|\mu_B$ ⇔ $\mu_A | \mu_B$ et $\mu_{A'} | \mu_B$
  comme μ_B annule B, il annule A et A'
  Donc μ_B est multiple de μ_A et $\mu_{A'}$

Sous espace caractéristique et projecteurs spectraux .

Résumé A matrice (ou un endomorphisme)

$\mu_A = \prod P_i^{m_i}$ P_i irréductible

Lemme des noyaux : E = Ker 0 = Ker $\mu_A(A) = \bigoplus_i Ker\ P_i^{m_i}(A)$

Etudier A revient à étudier $\boxed{Ker\ P_i^{m_i}(A)} = K_i$: sous espaces caractéristiques.

$$A \underset{semblable}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

π_i projection $E \to K_i // \bigoplus_{j \neq i} K_j$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non diagonalisable

Commentaire [p1]: Nouveau lien entre arithmétique et réduction

Commentaire [p2]: Nouveau lien entre arithmétique et réduction

Commentaire [p3]: K_i

Commentaire [p4]: K_k

Fiche IV.

Exercice 1.* Soit E un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel.$ Un endomorphisme π de E est appelé projecteur si $\pi^2=\pi$.

1. Montrer que si π est un projecteur de E, alors E = $Ker\ \pi \oplus Im\ \pi$.
   La réciproque est-elle vraie ?
   Projecteur π ⇔ $\pi^2=\pi$
   Rq : π est annulé par $X^2-X=X(X-1)=\mu$ scindé simple
   Lemme des noyaux :
   E = Ker 0 = Ker $\mu(\pi)$ $= Ker\ \pi \oplus Ker\ (\pi - \mathrm{Id})$
   Rq : π est diagonalisable (→ scindé simple) donc les sous-espaces caractéristiques sont les sous-espaces propres.
   [Si $\mu=\pi_\lambda(X-\lambda)$ E = $\bigoplus_\lambda Ker\ (A - \lambda \mathrm{Id})$ c'est la diagonalisation]

   Commentaire [p5]: $=E_\lambda$

   Montrer que : Ker(π –Id) = Im(π)
   - Im π ⊂ Ker(π –Id)
     $Y \in Im\ \pi \implies Y = \pi(X) \implies \pi(Y) = \pi(\pi(X)) = \pi^2(X) = \pi(X) = X$
     $\implies (\pi - Id)(Y) = 0$
   - $Ker(\pi - Id) \subset Im\ \pi$
     $X \in \ker(\pi - Id) \Rightarrow \pi(X) = X \Rightarrow X = \pi(X) \in Im\ \pi$
     $\boxed{E = Ker\ \pi \oplus Im\ \pi}$

   Réciproque fausse:
   Si $\pi^2 = 2\pi$ alors E = $Ker\ \pi \oplus Im\ \pi$ mais π n'est pas un projecteur.

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si π est un projecteur de E, alors rang(π) = trace(π)
   Montrer que π est un projecteur, alors rg(π) = tr(π) π est diagonalisable ses v.p. sont alors racines de (X^2-X)
   $Sp(\pi) \subset \{0,1\}$ et donc

$$Mat_B(\pi) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \leftarrow Ker\,\pi \rightarrow \quad \leftarrow Ker\,(\pi - \mathrm{Id}) \rightarrow \end{array}$$

Commentaire [p6]: Im π

rg π = dim Im π

tr π = 0+ … +0 + 1 + … + 1 = dim Ker(π – Id) = rg π.

Exercice 2.* Montrer qu'un espace vectoriel E est somme directe de sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ si et seulement s'il existe des projecteurs $\pi_i : E \to E_i$, $i = 1, \dots, p$, satisfaisant

$$1. \pi_i\pi_j = 0,\ si\ \ i \neq j \quad 2. Im\,\pi_i = E_i, \quad 3. id_E = \pi_1, \dots, \pi_p,$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$

Soit π_i= projecteur sur E_i parallèlement à $\underset{j\neq i}{\oplus} E_j$

1. $\pi_i\pi_j = 0?$ (*)

   $x = x_1 + \cdots + x_p$ de façon unique $x_k \in E_k$

   (On utilise ici l'hypothèse de la somme directe)

   $(\pi_i\pi_j)(x) = (\pi_i\pi_j)(x_1 + \cdots + x_p)$

   $(\pi_i\pi_j)(x) = (\pi_i\pi_j)(x_1) + \cdots + (\pi_i\pi_j)(x_p)$

   or $\pi_j(x_k) = \begin{cases} x_k\ si\ k = j \\ 0\ sinon \end{cases}$

   donc $(\pi_i\pi_j)$(x) = $(\pi_i\pi_j)(x_j)$ = $(\pi_i)(x_j) = 0$ car $i \neq j$.

2. Cf def de projecteur
3. Mq $Id = \pi_1 + \cdots + \pi_p \quad \forall\, x \in E$.

   Id(x)= x = $x_1 + \cdots + x_p$= $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \cdots + \pi_p(x)$

   $\Longrightarrow$ Id = $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_p$

$\boxed{\Longleftarrow}$

E = $E_1 \oplus E_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0\} \end{cases}$

E= $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} E = E_1 + E_2 + E_3 \\ E_i \cap (\sum_{j\neq i} E_j) = \{0\} \end{cases}$

Montrons que $E = E_1 + \cdots + E_p$

Soit $x \in E_i$ on veut la decomposition sur les E_i.

X= Id(x) par (3) = $(\pi_1 + \cdots + \pi_p)$(x)

= $\pi_1(x) + \pi_2(x)$ + … + $\pi_p(x)$ par (2)

Commentaire [E7]: $\in E_1$

Commentaire [E8]: $\in E_2$

Commentaire [E9]: $\in E_p$

Donc on a la décomposition.

On veut que $E_i \cap (\sum_{j\neq i} E_j)$ = 0

Soit $x \in E_i$ et $x \in \sum_{j\neq i} E_j$

Comme x= $\pi_1(x) + \pi_2(x)$ + … + $\pi_p(x)$ il suffit de montrer que $\pi_k(x) = 0\ \forall\ k$.

Dans ce cas * k=i

$\pi_k(x) = \pi_i(x) = \pi_i(\sum_{j\neq i} x_j)$=$\pi_i(\sum_{j\neq i}\pi_j(x_j))$ =$\sum_{j\neq i}\pi_i\pi_j(x_j)$ = 0

Commentaire [E10]: $x_j \in E_j$

- $k = j \neq i$

π_k (x) = π_j (x)= π_j (π_i (x)) =π_j π_i (x)=0

Commentaire [E11]: Car $x \in E_i$ => π_i (x)=x

$conclusion\ x = 0$

Moralité une somme directe est équivalente à la donnée de projecteurs orthogonaux.

Exercice 5. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ représenté dans la base canonique par la matrice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de u.

$$\begin{vmatrix} 2-X & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -X & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$

= (2-X)(1-X)$\begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & -1 & 2-X \end{vmatrix}$

= (2-X)²$(1-X)^3$ = $-(X-2)^2(X-1)^3$

Cayley-Hamilton

E = Ker 0 = Ker $\chi_A(A) = Ker\ (A - Id)^3 \oplus\ Ker\ (A - 2Id)^2$

Commentaire [E12]: $= K_1$

Commentaire [E13]: $= K_2$

Ker 0 = $\{x,\ 0(x) = 0\}$= E

Commentaire [E14]: Endomorphisme nul

K_1?

$(A - Id)^3$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_5\ \in K$

De dim 3 donc $K_1 = \langle e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_5 \rangle$

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$(A - Id)^3 \sim \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

Tr$(A - Id)^3 = 2$

K_2?

$$(A-2Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_3 - e_4$
$e_1 + e_4 + e_5$
$On\ sait\ que\ \dim K_2 = 2$
$K_1 = \langle e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_5 \rangle$
$K_2 = \langle\ e_3 - e_2, e_1 + e_4 + e_5 \rangle$

2. Construire une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de u est de la forme.

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Les sous-espaces caractéristiques sont des sous-espaces stables par 4.

Dans la base $(e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_5, e_3 - e_4, e_1 + e_4 + e_5)$
$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $C\ \in M_3, D\ \in M_3$
On veut montrer que C et D peuvent être mis sous forme triangulaires.
C= Mat$(u|K_1)$ D= Mat$(u|K_2)$
Posons $u_1 = U_{k_1}$ comme $K_1 = Ker\ (u - Id)^3$
$u_1 : K_1 \to K_1$
$x \to\ \ u_1(x) = x$
$\forall\, x\ \in K_1\ \ (u - Id)^3(x) = 0$ (par définition de K_1)
Donc $(u_1 - Id_5)^3 = 0$
$(u_1\ est\ annulé\ par\ (X-1)^3\ )$
$sp(u_1) \subset$ Racines de $(X-1)^3 = \{1\}$
1 est valeur propre de u_1
$\chi_{u_1} = (X-1)^3$ (car dim $k_1 = 3$)
U_1 peut s'écrire matriciellement $\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
De même u_2 peut s'écrire matriciellement $\begin{pmatrix} 2 & * \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Conclusion u peut s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & & 2 & * \\ & & & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$K_1 = Ker\ (u - Id)^3$
$K_2 = Ker\ (u - 2Id)^2$